

Obsah

1	Úvod	1
2	Korelácie v klasickej fyzike	3
2.1	Definícia korelácie	3
2.2	Miery korelácie	4
2.2.1	Korelačný koeficient	4
2.2.2	Index korelácie - vzájomná informácia	5
2.3	Maximálna korelácia	6
2.4	Symetria korelácie	6
2.5	Viacčasticové korelácie	7
3	Previazanie	10
3.1	Paradox Einsteina, Podolskeho a Rosena	10
3.2	Bellove nerovnosti	11
3.3	CHSH nerovnosť	15
3.4	Experimentálne potvrdenie	16
3.5	Dvojčasticové previazanie	19
3.5.1	Bellove stavy	20
3.5.2	Kritériá separability pre častice so spinom $1/2$	20
3.5.3	Miery previazania	22
3.6	Viacčasticové previazanie	25
3.6.1	Trojčasticový model	25
3.6.2	Čo je viacčasticové previazanie?	26
3.6.3	Kritériá separability	27
3.6.4	Miery viacčasticového previazania	28
4	Korelácie na kvantových systémoch	30
4.1	Korelácie dvoch qubitov	30
4.1.1	Čistý stav dvoch qubitov	30
4.1.2	Zmes dvoch qubitov	30
4.1.3	Miery korelácie	31
4.2	Viacčasticová korelácia	32
4.2.1	Rozpad viacčasticového previazania	32
4.2.2	Čistý stav troch qubitov	33

5	Odhady v kvantovej mechanike	35
5.1	Úvod	35
5.2	Maximum likelihood method	36
5.2.1	Popis metódy	36
5.2.2	Odhad zmiešaného stavu jedného qubitu	38
5.3	Odhad spinu podľa jeho priemetov	38
5.4	Kvantové operácie	39
5.4.1	Definície	39
5.4.2	Priama rekonštrukcia	41
5.4.3	Rekonštrukcia pomocou previazaných stavov	43
6	Previazané grafy	44
6.1	Definícia	44
6.2	Previazané grafy pre tri qubity	45
6.2.1	Čisté a zmiešané stavy	46
6.3	Previazané grafy pre N qubitov	47
6.3.1	Zmiešané stavy	47
6.3.2	Čisté stavy	48
6.4	Váňované grafy	50
6.4.1	Definícia	50
6.4.2	Príklady	51
6.4.3	Všeobecné riešenie	53
7	Korelované grafy	56
7.1	Definície	56
7.2	Zmiešané stavy	58
7.3	Čisté stavy	60
7.3.1	Trojčasticové grafy	60
7.3.2	Viacčasticové grafy	61
7.3.3	Ďalšie typy grafov	64
7.3.4	Ďalšie možnosti postupu	64
8	Rekonštrukcie jednoqubitových kvantových operácií	66
8.1	Neúplné rekonštrukcie	66
8.1.1	Žiaden vstupný stav	68
8.1.2	Jeden vstupný stav	68
8.1.3	Dva vstupné stavy	72
8.1.4	Tri vstupné stavy	79
8.2	Nekonzistentné dáta	80
8.3	Maximum likelihood	84
8.3.1	Numerický postup	84
8.3.2	Experimentálne dáta	86
8.3.3	Simulácie nefyzikálnych operácií	87
9	Záver	92

A	Váhované grafy	94
A.1	Výpočet konkurencie	94
A.2	Dôkaz konvergenzie iteračnej metódy	95
B	Publikácie a príspevky na konferenciách	100

**CENTRUM PRE VÝSKUM Kvantovej Informácie
FYZIKÁLNY ÚSTAV
SLOVENSKÁ AKADÉMIA VIED
BRATISLAVA**

**Kvantové korelácie
v mnohočasticových systémoch
(Dizertačná práca)**

30. November 2004

RNDr. Martin Plesch

Čestne prehlasujem, že som dizertačnú prácu vypracoval samostatne.

Ďakujem svojmu školiteľovi Prof. Vladimírovi Bužekovi za podporu a cenné rady, ktoré mi výrazne pomohli pri mojej práci. Za podnetnú spoluprácu ďakujem tiež Máriovi Zimanovi, Zuzke Dzurákovej a Jarovi Novotnému. V neposlednom rade patrí moja vďaka priateľke Gabike Gregušovej za korekcie práce, ale hlavne za trpezlivosť a lásku, ktorú mi za posledné dva roky venovala.

Kapitola 1

Úvod

Kvantová komunikácia, ako vlajková loď využitia nerelativistickej kvantovej mechaniky v praxi, prelomila za posledný rok pomyselnú bariéru a prekročila brány laboratórií. Objavili sa prvé zariadenia využívajúce existujúce telekomunikačné optické vlákna, ktorých rozmery (ale i cena) nebránia aj praktickému využitiu [1]. Zatiaľ sa dá hovoriť len o prvej lastovičke. Praktické problémy spojené hlavne s nízkym dosahom rátaným v desiatkach kilometrov, nízkou spoľahlivosťou a extrémne malou priepustnosťou totiž zatiaľ bránia masovejšiemu rozšíreniu. No predsa je to dobrá správa aj pre teoretických fyzikov pracujúcich v tejto oblasti.

Naše pochopenie *kvantovej fyziky* a všetkého čo s tým súvisí sa od čias Schrödingera [2], ale aj Bella [3] značne rozšírilo. Niekedy sa však zdá, že úspešné zodpovedanie jednej otázky otvára niekoľko ďalších. Je preto dôležité aj v prípadoch, keď je konkrétne využitie formulovanej teórie nejasné alebo prakticky nemožné, hľadať odpovede na otvorené otázky.

Vo svojej práci sa venujem problému klasických i kvantových korelácií (previazania) v kvantovej mechanike. Sústreďujem sa na systémy pozostávajúce z mnohých dvojhladinových systémov (reprezentovaných napríklad spinom elektrónu, polarizáciou fotónu alebo atómom s dvoma blízkymi stabilnými hladinami). Tieto systémy budem v práci označovať jednotným pojmom qubit, z anglického quantum bit.

Na začiatku, v druhej kapitole, predkladám prehľad korelácií v klasických systémoch. Práca samotná sa týka síce výhradne kvantovej mechaniky, považujem však za rozumné zdôrazniť podobnosti, ale aj výrazné rozdiely oproti klasickej fyzike. V tretej kapitole nasleduje prehľad o previazaní - kvantových koreláciách založený na najpodstatnejších článkoch, ktoré boli o tejto problematike uverejnené.

Štvrtá kapitola sa zaoberá klasickými koreláciami v kvantovej fyzike. Niektoré poznatky a definície som čerpal z knihy [4], v mnohých prípadoch však uvádzam vlastné úvahy a tvrdenia. Výsledky mojej práce v tejto oblasti sú zhrnuté v kapitolách šesť a sedem. V šiestej, ktorá je spracovaná na základe článku [5], sa venujem zdieľaniu kvantových korelácií v systémoch mnohých qubitov, dvojhladinových častíc. Prezentujem tiež výsledky priamej kontroly previazania v systéme spojené s návrhom možnej prípravy príslušných stavov pomocou kvantových logických sietí [6]. V siedmej kapitole je problematika rozšírená podľa [7] tiež o klasické korelácie.

Piata kapitola otvára pohľad do inej časti problematiky. Venujem sa v nej odhadom v kvantovej mechanike, riešením situácií pri nedostatku experimentálnych dát alebo ich nekonzistencii pri rekonštrukcii kvantových stavov i operácií. Uvádzam tu už známe a publikované fakty. Jej prirodzeným pokračovaním je kapitola osem, spísaná na základe publikovaných

i pripravovaných článkov [8]. Skúmam v nej konkrétne spôsoby rekonštrukcie kvantových operácií (kanálov) ako pri nedostatku rôznych vstupných stavov, tak aj pri nedostatočnej štatistike (malé objemy meraní).

V závere práce som zhrnul získané poznatky a predostrel ďalšie otvorené otázky a možné smery výskumu.

Kapitola 2

Korelácie v klasickej fyzike

2.1 Definícia korelácie

Korelácia dvoch javov, systémov, výsledkov meraní atď. v tom najvšeobecnejšom zmysle znamená, že tieto spolu nejakým spôsobom súvisia. Bud' tak, že dej či udalosť na jednom systéme priamo ovplyvňuje dej na druhom systéme. Alebo tiež tak, že oba systémy, o ktoré sa zaujímame, v minulosti spolu interagovali a vytvorili si istý druh väzby.

Jediný spôsob, akým môže vonkajší pozorovateľ získavať informácie o fyzikálnom systéme je jeho meranie. Preto sa obmedzím pri diskusii o koreláciách len na koreláciu medzi výsledkami meraní. V prvej časti sa budem venovať len koreláci, ktorá môže vzniknúť medzi dvoma systémami. Môžeme zaviesť dva koncepčne mierne odlišné pohľady, ktoré ale reprezentujú stále tú istú fyzikálnu podstatu.

V prvom prípade definujeme koreláciu ako súvis výsledkov (vo všeobecnosti rôznych) meraní na dvoch rôznych systémoch. Typickým príkladom sú dve mince, ktoré hodíme do vzduchu a po dopade meriame každú mincu s výsledkom panna/orol. Ak vyhodnotíme štatistickú sériu meraní pre každú mincu zvlášť, dostaneme dve nezávislé charakteristiky jednotlivých mincí. Každá minca je charakterizovaná jedným reálnym číslom P_{orol} , ktoré určuje pravdepodobnosť, že pri hode touto mincou dopadne tak, aby bol viditeľný orol. Ak zanedbáme možnosť dopadu na hranu, stratu mince a podobne, tak platí $P_{panna} = 1 - P_{orol}$. Obe mince môže byť charakterizované vo všeobecnosti rôznym číslom, zavedieme preto P_{orol}^1 a P_{orol}^2 pre obe mince.

Ak budeme štatisticky vyhodnocovať výsledky meraní na oboch minciach a dávať ich do súvisu, na charakterizáciu celého systému dvoch mincí potrebujeme až tri parametre. Systém bude určený pravdepodobnosťami

$$\begin{aligned} &P_{orol,orol} \\ &P_{orol,panna} \\ &P_{panna,orol} \\ &P_{panna,panna} = 1 - P_{orol,orol} - P_{panna,orol} - P_{orol,panna}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nutnou podmienkou toho, že výsledky meraní na jednotlivých minciach spolu nesúvisia je

$$P_{orol}^1 \cdot P_{orol}^2 = P_{orol,orol} \tag{2.2}$$

a vo všeobecnosti všetky ďalšie kombinácie možných výsledkov. Podmienka (2.2) sa da chápať tak, že výsledky meraní sú nekorelované, ak pravdepodobnosť výskytu konkrétnej sady výsledkov je daná práve súčinom pravdepodobností výskytu jednotlivých výsledkov zo sady.

Druhý možný pohľad na koreláciu je súvis výsledkov meraní dvoch rôznych vlastností toho istého systému. Napríklad môžeme v lese skúmať stromy a merať, či sú ihličnaté a listnaté (prvá vlastnosť) a potom, či sú vysoké alebo nízke (pri vhodnom definovaní zlomovej výšky bude výsledok experimentu binárny). Možnosť korelácie v tomto prípade je oveľa zrejmejšia. Kým napríklad pri spomínaných minciach by sme na to, aby vznikala korelácia, museli požadovať existenciu akejkoľvek vonkajšej sily (napríklad ovplyvňovanie pri hode mincí), tu je to prirodzene dané existenciou spoločného systému, na ktorom vlastnosti meriam (v tomto prípade stromu).

Z teoretického pohľadu sa však jedná stále o tú istú problematiku, preto budem v ďalšom texte bez upozornenia prechádzať medzi oboma interpretáciami.

2.2 Miery korelácie

2.2.1 Korelačný koeficient

Najjednoduchšia "miera" klasických korelácií medzi vlastnosťami A a B systému S je korelačný koeficient. Označme sadu meraní vlastnosti A vektorom \vec{a} (jednotlivý výsledok merania budeme označovať a_i) a vlastnosti B vektorom \vec{b} . Korelačný koeficient je definovaný ako

$$K = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (2.3)$$

a nadobúda hodnoty v intervale $K \in \langle -1, 1 \rangle$. Už len z tohoto dôvodu by nemohol byť korelačný koeficient "dobrou" mierou, pretože požadujeme, aby miera nadobúdala len nezáporné hodnoty (nulovú len za predpokladu splnenia podmienky (2.2)). Tento problém by sa síce dal riešiť umocnením na druhú, nedostatky K sú však podstatnejšieho rázu.

Korelačný koeficient zachytáva iba lineárnu zložku korelácie. Je väčší ako nula v prípade, ak sa vo všeobecnosti výsledky merania veličiny B zväčšujú spolu s výsledkami merania veličiny A a naopak je záporný, ak sa výsledky B znižujú pri zväčšovaní výsledkov A (v tomto prípade sa často hovorí o anti-korelácií). Tento prístup je vhodný v situácii, ak pracujeme s veľkými množstvami dát s náhodnými chybami a hľadáme základný trend. Už v prípadoch len o málo zložitejších prístup beznádejne zlyháva.

Zoberme situáciu, keď

$$\begin{aligned} a_i &\in \langle -1, 1 \rangle \\ b_i &= |a_i|. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Vlastnosti A i B sú evidentne korelované (vieme nájsť jasný súvis medzi výsledkom oboch meraní, resp. ak poznáme jeden výsledok, vieme podstatne viac o očakávanom druhom výsledku ako predtým). Pri dostatočne veľkom počte meraní však korelačný koeficient klesá k nule, pretože už samotný skalárny súčin v čitateli klesá k nule (jedná sa o súčet rovnakých čísel opačného znamienka).

Korelačný koeficient tak, ako sme ho doteraz používali, bol definovaný pre konečný počet meraní a nepredpokladali sme, že poznáme pravdepodobnostné rozloženie očakávaných výsledkov. V opačnom prípade by sa definícia (2.3) zmenila na

$$K = \frac{\sum p_{ij} a_i b_j}{\sum p_i a_i \sum p_j b_j}, \quad (2.5)$$

kde p_{ij} je pravdepodobnosť namerať výsledky a_i a b_j a

$$p_i = \sum_j p_{ij}. \quad (2.6)$$

Pri spojitom spektre možných výsledkov by príslušné sumy prešli na integrály cez hustoty pravdepodobností. Nič by to však nezmenilo na skutočnosti, že nenulový korelačný koeficient je postačujúcou, ale nie nutnou podmienkou existencie korelácie medzi výsledkami meraní.

2.2.2 Index korelácie - vzájomná informácia

Nádejnou možnosťou pre definíciu dobrej miery je využiť entropiu. Index korelácie je definovaný práve pomocou nej ako rozdiel entropií podsystemov a entropie celkového systému

$$I = S_A + S_B - S_{AB}, \quad (2.7)$$

kde S je entropia (logaritmus sa chápe so základom 2) [9]

$$S = - \sum p_i \log(p_i). \quad (2.8)$$

Ak je index korelácie nulový, znamená to, že celá sústava systémov A a B má rovnakú entropiu ako súčet entropií jednotlivých systémov. Pri rozdelení systému AB teda nevznikla žiadna dodatočná entropia, nestratili sme tým žiadnu informáciu. To je možné jedine v prípade, ak sme žiadnu informáciu nemali, teda výsledky meraní medzi sebou vôbec nesúviseli.

Dokážeme, že ak sú merania nekorelované (splňajú podmienku (2.2)), index korelácie je nulový. V tom prípade platí (index i sa vzťahuje vždy k meraniu veličiny A a index j k meraniu veličiny B), že

$$p_i \cdot p_j = p_{ij} \quad (2.9)$$

a tiež

$$\log p_i + \log p_j = \log p_{ij}. \quad (2.10)$$

Pre súčet entropií podsystemov môžeme písať

$$\begin{aligned} S_A + S_B &= \sum_i p_i \log p_i + \sum_j p_j \log p_j \\ &= \sum_{i,j} p_{ij} (\log p_i + \log p_j) \\ &= \sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij} = S_{AB}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Maximálna hodnota indexu závisí pochopiteľne od rozmerov systému, v ktorom pre-
vádzame merania (od počtu možných výsledkov). V jednoduchom prípade 2×2 (dve mince) je maximálna hodnota práve jedna.

2.3 Maximálna korelácia

Na to, aby sme mohli zaviesť a pochopiť mieru korelácie, potrebujeme si ujasniť hraničné prípady. V jednom okrajovom prípade je to jasné, merania sú nekorelované vtedy a len vtedy, ak spĺňajú podmienku (2.9), vtedy požadujeme, aby miera bola nulová. Kedy sú však výsledky meraní maximálne korelované?

Intuitívny pohľad je ten, že určite vtedy, ak budú vždy rovnaké, teda $a_i = b_i$. Koeficient korelácie je v tomto prípade rovný jednej, ale hodnota indexu závisí od toho, aká veľká je entropia podsystemov (keďže v tomto prípade budú všetky tri entropie z rovnice (2.7) rovnaké, stačí uvažovať jednu). Tá zasa závisí od pravdepodobnostného rozloženia očakávaných výsledkov.

Jeden z možných pohľadov je taký, že maximálnu koreláciu dosahujeme len vtedy, ak maximalizujeme index korelácie. Vtedy musíme maximalizovať entropiu podsystemov, čo dosiahneme rovnomerným rozložením očakávaných výsledkov. Podľa tejto interpretácie sú merania veličín A a B maximálne korelované len vtedy, ak sme pred meraním veličiny A nevedeli o predpokladanom výsledku merania veličiny B vobec nič, ale po získaní výsledku a_i už vieme s istotou predpovedať hodnotu výsledku b_i .

Druhý pohľad je všeobecnejší a pripúšťa maximálnu koreláciu vždy, keď po zmeraní veličiny A vieme s istotou predpovedať výsledok merania veličiny B .

Oba prístupy majú svoje výhody aj nevýhody. V prvom prípade je jasné z definície, že výsledky meraní môžu byť maximálne korelované vtedy a len vtedy, ak nebola o nich dopredu známa žiadna apriórna informácia. Ak hádzeme mincami, môžeme o maximálnej korelácii hovoriť len vtedy, keď sú mince dokonale symetrické. Akonáhle by začala vo výsledkoch prevažovať jedna strana aspoň u jednej mince, maximálna korelácia by nemohla nastať. Tento fakt je do istej miery neprirodzený.

Druhý prístup vykazuje ešte vážnejšie trhliny. Pokiaľ prejdeme do extrému, môžeme uvažovať systém, kde meranie veličiny A aj B má vždy iba jeden možný výsledok a_1 a b_1 . Po zmeraní veličiny A vieme s istotou predpovedať výsledok merania B , systém by mal byť maximálne korelovaný. Lenže, to isté sme vedeli už aj predtým, než sme merali. Navyše pravdepodobnostné rozdelenie triviálne spĺňa podmienku nekorelácie (2.9). Teda systém je nekorelovaný a zároveň maximálne korelovaný!

V ďalšom budem považovať dva systémy za maximálne korelované len vtedy, ak sa maximalizuje index korelácie pre daný systém.

2.4 Symetria korelácie

Ak hovoríme o koreláciách dvoch meraní či systémov, zväčša sa to chápe ako korelácia vzájomná. Nerozlišujeme teda koreláciu veličiny A voči veličine B a opačne. Rovnako korelačný koeficient aj index korelácie sú symetrické vzhľadom na zámenu veličín.

Napriek tomu nie je symetria zjavná. Predstavme si hod štandardnou kockou. Meranie veličiny A bude meraním konkrétneho hodeného čísla (so šiestimi možnými výsledkami) a meranie veličiny B bude binárne meranie párne-nepárne číslo. Ak meriame každú veličinu zvlášť, pravdepodobnostné rozdelenia sú rovnaké pre každý možný výsledok. Pri spojenom meraní, ak nameriame výsledok veličiny A (konkrétne číslo), s trochou matematickej zručnosti vieme okamžite určiť aj výsledok prípadného merania veličiny B (či je číslo párne alebo

nepárne). Veličiny by teda mali byť maximálne korelované. Na druhej strane, výsledok merania B nám ešte s istotou nestanoví výsledok merania veličiny A , len obmedzí množinu možných výsledkov. Preto by sme mali upraviť, pre prípad rozdielne veľkých množín výsledkov A a B , definíciu maximálnej korelácie.

Definícia Veličiny A a B sú maximálne korelované, ak je apriórna vedomosť o výsledkoch jednotlivých meraní minimálna možná, ale výsledkom zmerania jednej veličiny získame maximálnu možnú informáciu o výsledku (prípadného) merania druhej veličiny.

2.5 Viacčasticové korelácie

V doterajšom texte som sa zamerával len na skúmanie dvojčasticových korelácií. Teda korelácií medzi dvoma systémami alebo korelácií len dvoch vlastností toho istého systému. Napriek tomu, že sa jedná o najjednoduchšiu možnú formu korelácií, nebolo ich pochopenie jednoduché. Pri viacerých časticách je to ešte podstatne zložitejšie, preto rozoberiem len prípad troch častíc.

Trojčasticový systém je trojčasticovo nekorelovaný, ak platí

$$p_{i,j,k} = p_i \cdot p_j \cdot p_k, \quad (2.12)$$

kde i, j a k sú indexy postupne referujúce na meranie vlastností na troch rôznych časticách. Potom sú aj každé dve častice triviálne nekorelované, pretože ak zoberieme všetky možné rovnice (2.12) s rôznymi hodnotami k a sčítame ich, dostávame

$$\begin{aligned} \sum_k p_{i,j,k} &= \sum_k p_i \cdot p_j \cdot p_k; \\ p_{i,j} &= p_i \cdot p_j, \end{aligned} \quad (2.13)$$

čo je podmienka (2.9) pre prvé dve častice. Podobne ak urobíme súčet cez i alebo j , dostaneme podmienku aj pre zvyšné dvojice.

Veľmi zaujímavé však je, že opačne už postup neplatí. Existujú systémy, kde sú po dvojiciach každé dve častice nekorelované, ale celý systém nespĺňa podmienku trojčasticovej nekorelácie (2.12). Sledujme tri vlastnosti systému, označené A, B a C . Každá z nich môže nadobúdať len dve možné hodnoty a_1, a_2, b_1, b_2 a c_1, c_2 . Pravdepodobnostné rozloženie systému je dané

$$\begin{aligned} p_{1,1,1} &= p_{2,2,1} = p_{1,2,2} = p_{2,1,2} = \frac{1}{4} \\ p_{1,1,2} &= p_{1,2,1} = p_{2,1,1} = p_{2,2,2} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ak teraz spočítame rozdelenie pre ľubovoľné dve vlastnosti (ak neberieme do úvahy tretiu), dostávame

$$p_{1,1} = p_{1,2} = p_{2,1} = p_{2,2} = \frac{1}{4} \quad (2.15)$$

a tieto dve vlastnosti evidentne nie sú korelované. Z definície (2.14) je ale zrejmé, že systém korelovaný je, pretože nie je splnená podmienka (2.12). Takýto systém budeme nazývať *čisto trojčasticovo korelovaný*. Myslíme pod tým to, že zmeraním jednej vlastnosti nezískame žiadnu dodatočnú informáciu o druhej či tretej vlastnosti, ale získaním výsledkov meraní dvoch vlastností už dostaneme (akúsi, v tomto konkrétnom prípade úplnú) informáciu o tretej vlastnosti.

Praktickým príkladom (ktorý je však stále nutné vnímať v čisto abstraktnej rovine) môže byť situácia, keď sledujeme tri vlastnosti stromov, a to výšku (s binárnym výsledkom vysoký, nízky), typ lístia (listnatý, ihličnatý) a opadavosť v zime (opadavý, neopadavý). V lese sa nachádzajú 4 druhy stromov (každý v rovnakom počte), a to červený smrek (opadavý, vysoký, ihličnatý), kosodrevina (neopadavá, nízka, ihličnatá), lieska (nízka, opadavá, listnatá) a sucháne obrastené zimozeleňom (pri troche fantázie vysoké, neopadavé a listnaté). Pri prechádzke sa môžeme snažiť pomocou zisťovania niektorých vlastností odhadovať aj zvyšné. Je zrejmé, že ak nepoznáme žiadnu vlastnosť, pravdepodobnosť toho, že náš strom je opadavý je 50%, rovnako ako pravdepodobnosť ktoréhokolvek iného výsledku (neopadavý, ihličnatý, nízky...). Ak sme zistili jednu vlastnosť (povedzme, že strom je ihličnatý), vylúčili sme dva druhy stromov a zostala nám už len kosodrevina a červený smrek. Pravdepodobnosť iných výsledkov sa však nezmenila, stále môžeme rovnako dobre zistiť, že strom je opadavý, neopadavý či vysoký, nízky.

Pri zmeraní ďalšej vlastnosti (napríklad zistíme, že strom je vysoký) však už máme automaticky k dispozícii aj výsledok merania tretej vlastnosti (jediný strom, ktorý vyhovuje prvým dvom výsledkom je červený smrek a ten je opadavý).

Vo všeobecnosti môžeme spôsoby korelácie troch častíc zhrnúť do nasledujúcich možností:

- Systém nie je vôbec korelovaný (splňa podmienku (2.9)). Napríklad poctivé hádzanie troch mincí.
- Dve častice systému sú dvojčasticovo korelované a tretia je od nich úplne nezávislá, platí rovnica $p_{i,j,k} = p_{i,j} \cdot p_k$. Napríklad k dvom korelovaným minciam pridáme tretiu, nezávislú.
- Jedna častica systému je korelovaná dvojčasticovo s oboma ďalšími časticami, ktoré sú ale navzájom na sebe nezávislé. Platí

$$p_{i,j,k} = p_{i,j} \cdot p_{i,k} \quad (2.16)$$

a príkladom môže byť znova sústava troch mincí. Dve sú hádzané nezávisle a poloha tretej je určovaná tak, že výsledkom jej merania je orol vtedy a len vtedy, ak na oboch zvyšných minciach padol orol. Vo zvyšných prípadoch meranie tretej mince dáva ako výsledok pannu.

- Všetky tri častice sú dvojčasticovo korelované. Napríklad tri mince, ktoré vždy vykazujú rovnaké výsledky meraní.
- Častice po dvojiciach sú nekorelované, ale systém nespĺňa podmienku (2.9). Vtedy hovoríme o čisto trojčasticovo korelovanom systéme a ako príklad (okrem vyššie uvedeného) môžu slúžiť tri mince, z ktorých dve sú hádzané nezávisle a tretia je ukladaná tak, aby v prípade rovnakého výsledku na prvých dvoch ukazovala orla a v opačnom prípade hlavu.

Pre väčšie množstvo častíc sa stáva systém ešte omnoho zložitejším. Rovnakým postupom ako pre tri častice môžeme zdefinovať čisto štvorčasticovú koreláciu a ďalej deliť možný stav systému podľa existencie či neexistencie dvoj- a troj-časticových korelácií medzi jednotlivými podskupinami.

Podobne je tomu ak uvažujeme merania, ktoré majú nerovnaké množstvo možných výsledkov. To sa dá v istom zmysle tiež reprezentovať ako zväčšovanie počtu častíc, keďže meranie

vlastnosti so štyrmi možnými výsledkami môžeme formálne rozdeliť na meranie dvoch vlastností s dvoma výsledkami, ktoré budú (vo všeobecnosti) korelované. Preto sa v ďalšej práci budem venovať výlučne prvej problematike, teda veľkému počtu častíc s dvoma možnými výsledkami (dvojhladinové systémy). Nebudem uvažovať problémy a efekty, ktoré sú spojené s väčším rozmerom systému a hlavne s prípadmi, keď sa jedná o nesymetrické korelácie.

Kapitola 3

Previazanie

3.1 Paradox Einsteina, Podolskeho a Rosena

Na jednu z problematických stránok kvantovej mechaniky, s ktorými sa s väčšími či menšími úspechmi pasuje fyzikálna veda dodnes, upozornili Einstein, Podolski a Rosen v článku [2]. Pokúsili sa na základe niekoľkých vlastných definícií poukázať na to, že opis reality pomocou vlnovej funkcie nemôže byť úplný, teda že znalosť vlnovej funkcie nezodpovedá znalosti všetkých faktov o systéme (svedčí o tom už aj názov článku, v preklade: "Môžeme považovať kvantovo-mechanický opis fyzikálnej reality za kompletný?").

Základná Einsteinova axióma, ktorú považoval za nepochybniteľnú, sa týkala definície fyzikálnej reality. Einstein tvrdí: "Postačujúca podmienka na to, aby sme fyzikálnu veličinu považovali za reálnu je to, že dokážeme jej hodnotu pre daný fyzikálny systém predpovedať bez toho, aby sme narušili tento systém". V kvantovej mechanike ale nedokážeme s istotou predpovedať hodnoty veličín reprezentovaných dvoma nekomutujúcimi operátormi. V zmysle tejto argumentácie máme teda len dve možnosti: buď nemôžu byť obe veličiny naraz "reálne", alebo opis prírody a reality pomocou vlnovej funkcie nie je úplný.

Zoberme na začiatok príklad triviálneho systému s jedným stupňom voľnosti, ktorý sa nachádza v stave

$$\Psi(x) = e^{(2\pi i/h)p_0 x}, \quad (3.1)$$

kde h je Planckova konštanta a x nezávislá premenná. Uvedená funkcia je vlastným stavom operátora hybnosti

$$\hat{p} = (h/2\pi i) \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.2)$$

s vlastnou hodnotou p_0 . Nie tak ale pre operátor polohy \hat{x} , kde môžeme zaviesť len hustotu pravdepodobnosti toho, že sa častica nachádza v danom mieste. Ak má častica presne definovanú hybnosť, pojem polohy či súradníc v priestore nemá pre ňu žiaden fyzikálny význam.

Predstavme si teraz zložitejší fyzikálny systém, ktorý môžeme rozdeliť na dve časti, **I** a **II**, so súradnicami x_1 a x_2 . Nech tieto časti istý čas, povedzme od $t = 0$ do $t = T$, spolu interagovali. Po tomto čase už neumožníme žiadnu interakciu oboch systémov a preto, podľa argumentácie v článku, žiadna zmena či meranie odohrávajúce sa iba na systéme **I** nemôže ovplyvniť stav systému **II**. Vyberme teraz dve veličiny **A** a **B** s vlastnými funkciami ψ_i a φ_i . Celkovú vlnovú funkciu potom môžeme napísať ako rozklad podľa vlastných stavov týchto

veličín (pre jednoduchosť predpokladáme nedegenerovanosť):

$$\Psi^{I+II}(x_1, x_2) = \sum_n \psi_n(x_1)u_n(x_2) = \sum_n \varphi_n(x_1)v_n(x_2). \quad (3.3)$$

Ak teraz prevedieme na systéme **I** meranie veličiny **A**, výsledkom môže byť len jedna z jej vlastných hodnôt. Pritom sa ale vlnová funkcia zredukuje na jeden jediný člen zo sumy v rovnici (3.3). Ak napríklad nameriame hodnotu a_i , druhý systém zostane v stave $u_i(x_2)$. Ak zasa zmeriame veličinu **B** a získame b_j , druhý systém musí byť v stave $v_j(x_2)$. Keďže ale druhý systém "nevie", ktorú veličinu meriame, musia obe funkcie zodpovedať tej istej realite, keďže neexistuje žiadna interakcia medzi systémami. Druhý systém teda musí byť v stave, ktorého "realita" zodpovedá obom funkciám $u_i(x_2)$ i $v_j(x_2)$ naraz. Nič ale nebráni tomu, aby tieto funkcie boli vlastnými funkciami dvoch nekomutujúcich operátorov, napríklad už spomínanej polohy a hybnosti. To by ale znamenalo, že druhý systém má reálne presne určenú aj polohu, aj hybnosť, čo je v príkrom rozpore s tým, čo tvrdí kvantová mechanika.

V závere článku je položená otázka, či je naozaj popis systému pomocou vlnovej funkcie kompletný.

Krátko po uverejnení tohoto článku sa objavila odpoveď, ktorú publikoval Niels Bohr v [10]. Prijal definíciu reality, uvedenú v pôvodnom článku, snažil sa však ukázať, že problém je niekde inde. Totiž, že každý pokus či experiment, ktorý vykonáme, musí byť vyhodnocovaný samostatne a že nemôžeme vytvárať závery na základe toho, čo by sme mohli zmerať, ale len a len na základe toho, čo naozaj zmeriame. A ako vieme, naozaj zmerať môžeme len jeden z nekomutujúcich operátorov, ak zmeriame aj ten druhý, porušíme stav systému.

Einstein vo svojich pamätiach neprijal túto argumentáciu. Považoval aj naďalej za nezvrátitelný fakt, že akékoľvek meranie či iná manipulácia so systémom **I**, ktorý je priestorovo separovaný od zvyšku systému **II**, nemôže ovplyvniť tento systém.

Jednoduchší príklad, zakladajúci sa ale na úplne rovnakej dileme ako predchádzajúce, uverejnil Bohm [11]. Predpokladajme rozpad bezspinovej častice na dve častice so spinom $1/2$ (napríklad $\pi_0 \rightarrow e^+e^-$), ktoré sa od seba veľkou rýchlosťou vzdiaľujú. Na elektróne môžeme vykonať napríklad meranie spinu v smere osi x . Dostaneme výsledok $\pm 1/2$, ktorý už s určitosťou zafixuje veľkosť spinu v smere osi x aj pre pozitron. Rovnako dobre ale môžeme uskutočniť merania aj spinu v smeroch iných osí, napríklad y či z . Vychádza nám, že spin pozitronu musí byť teda určený vo všetkých osiach, čo je znova v rozpore s predikciami kvantovej mechaniky, ktorá to povoľuje maximálne pre jednu os.

Záver zo všetkých týchto úvah bol jednoznačný. Nie všetky fakty a skutočnosti, ktoré sme považovali až doteraz za nezvrátitelné, môžu ostať v platnosti. Kvantová mechanika vo svojej podstate nie je lokálnou teóriou. Názory, či takou má ostať alebo sa má (ak sa dá) doplniť na kompletnejšiu teóriu, v ktorej sa obnoví lokalita, mali svojich prívržencov i odporcov. Ak totiž prijmeme definíciu fyzikálnej reality, kvantová mechanika vo svojej vtedajšej i súčasnej podobe idú ruka v ruke s porušením lokality. Ak naopak postavíme na prvé miesto požiadavku lokálnosti, poprieme definíciu reality, čo bolo napríklad pre Einsteina neakceptovateľné.

3.2 Bellove nerovnosti

Veľký prínos v hľadaní odpovede na otázku, či je potrebné doplniť popis reality vlnovou funkciou ešte o *skryté parametre*, ktoré by zabezpečili zachovanie lokality v kvantovej mechanike,

primiesol Bellov článok [3]. Autor v ňom ukazuje, že akákoľvek teória, ktorá v sebe obsahuje skryté parametre a zachováva predpovedné vlastnosti kvantovej mechaniky, musí byť nelokálna. A tiež opačne, akákoľvek lokálna teória skrytých parametrov dáva pri vhodných pokusoch štatisticky iné výsledky ako kvantová mechanika. Kvantová mechanika totiž v štatistických výsledkoch pripúšťa korelácie, ktoré sú príliš silné na to, aby sa dali vysvetliť pomocou klasickej fyziky.

Argumentáciu previedol na zjednodušenom príklade dvoch častíc spinu $1/2$ z [11]. My sa na začiatok ale pozrime na jednoduchý príklad z klasickej fyziky [12]. Predstavme si malý balón, ktorý po vypustení vo veľkej výške praskne a rozpadne sa na dve časti, ktoré sa od seba vzdávajú. Každá z nich má nejaký moment hybnosti, ale celkový moment hybnosti je nula (predpokladáme, že balón sa pred prasknutím neotáčal). Označme momenty hybností týchto častíc ako \vec{J}_1 a \vec{J}_2 . Určíme tiež dva jednotkové vektory \vec{n}_1 a \vec{n}_2 , v smere ktorých budeme merať momenty hybnosti častí balóna. V skutočnosti nás ani nezaujíma veľkosť momentu, ale len jeho smer, budeme teda merať veličinu $a = \text{sign}(\vec{n} \circ \vec{J})$. Výsledok bude vždy ± 1 , špeciálny prípad nulového priemetu je pri veľkom množstve štatisticky nezaujímavý a môžeme ho obísť napríklad definovaním funkcie sign ako $+1$ aj pre nulový výraz v zátvorke.

Ak použijeme veľa balónov, ktoré necháme prasknúť, môžeme vykonať veľa meraní pri rovnakých hodnotách \vec{n}_1 a \vec{n}_2 . Môžeme hľadať priemernú hodnotu a_1 či a_2 (priemetu momentu hybnosti jedných či druhých častí balóna), ktoré by podľa štatistických zákonov mali klesať s počtom meraní N ako $\langle a \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$. Ak ale hľadáme koreláciu výsledkov meraní, tá už vo všeobecnosti nevymizne. Napríklad pre $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ bude

$$\langle a_1 a_2 \rangle = \sum_j \frac{a_1^j a_2^j}{N} = -1, \quad (3.4)$$

lebo $a_1 = -a_2$ pre ľubovoľné meranie. Toto vyplýva z požiadavky celkovo nulového momentu hybností oboch častí balóna. Ak spočítame výraz (3.4) všeobecne, dostaneme koreláciu

$$\langle a_1 a_2 \rangle = \frac{2\alpha}{\pi} - 1, \quad (3.5)$$

kde α je uhol medzi \vec{n}_1 a \vec{n}_2 v tomto poradí.

Pokračujme teraz v našich úvahách. Predstavme si, že balón zmenšíme natolko, že sa začne správať podľa zákonov kvantovej fyziky a označíme si jeho stav ψ . Jeho prasknutie môže zodpovedať napríklad už spomínanému rozpadu $\pi_0 \rightarrow e^+ e^-$ a meranie znamienka momentu hybnosti zameníme za meranie spinu elektrónu a pozitronu pomocou Stern-Gerlachovho prístroja. Meriame teda pozorovateľné $\vec{\sigma}_1 \circ \vec{n}_1$ a $\vec{\sigma}_2 \circ \vec{n}_2$ (priemety spinu na príslušné osi), ktorých vlastné hodnoty sú znova len ± 1 . Ak využijeme skutočnosť, že celkový spin systému je nulový, matematicky vyjadrenú vzťahom $\vec{\sigma}_1 \psi = -\vec{\sigma}_2 \psi$, dostaneme

$$\langle a_1 a_2 \rangle = -\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = -\cos(\alpha). \quad (3.6)$$

Z porovnania s (3.5) je zrejmé, že korelácie v kvantovej mechanike môžu byť pre všetky prípady (okrem triviálnych, keď je korelácia nulová alebo maximálna) silnejšie ako klasické. Bell ale ukázal ďaleko viac. Nehovorí len o porovnaní klasickej a kvantovej mechaniky. Hovorí o tom, aké vlastnosti musí mať teória, ktorá je lokálna. Zároveň ale ukazuje, že kvantová mechanika tieto vlastnosti nemá a dáva tak možnosť jednoznačne pomocou experimentu overiť, či je možná existencia "lepšej", kompletnejšej teórie, ako to navrhovali Einstein, Podolski a Rosen.

Predstavme si teraz dva lineárne polarizované fotóny, ktoré vznikli napríklad na spoločnej SPS¹ kaskáde a majú rovnakú polarizáciu. Fotóny letia rozličnými smermi a v dostatočnej vzdialenosti od seba, aby sme vylúčili akékoľvek vzájomné ovplyvňovanie, budú vystavené meraniu svojej polarizácie. Nazvime pre názornosť aparáty, ktoré budú merať polarizáciu prvej a druhej častice Alica a Bob. Obaja majú možnosť zvoliť si smer svojho merania (až pokiaľto je scenár zhodný s príkladom s balónom) ako jednu z dvoch možností. Alica má na výber smery \vec{n}_a a \vec{n}_c , Bob \vec{n}_b a \vec{n}_c (tu je dôležité to, že dva z troch prípustných smerov sú presne rovnaké). Označme výsledky meraní a, b a c (nadobúdajú hodnotu ± 1 , znamenajú v prípade $+1$ polarizáciu zhodnú s meraným smerom a v prípade -1 polarizáciu kolmú), pričom vieme, že ak sa obaja rozhodnú pre meranie v smere vektora \vec{n}_c , výsledok im musí vyjsť rovnaký. Vieme teraz napísať identitu, ktorá platí bez ohľadu na to, ktoré merania sa uskutočnili:

$$a(b - c) \equiv \pm(1 - bc). \quad (3.7)$$

Jednoduchým overením prípustných možností pre a, b a c sa môžeme presvedčiť, že skutočne platí, hoci v skutočnosti môžeme na základe merania získať len dva z troch údajov v rovnici. Predpokladajme ale, že máme akúsi (nijak bližšie neurčenú) deterministickú lokálnu teóriu skrytých premenných. V tomto prípade musia byť všetky tri výsledky dopredu a-priori dané a môžu závisieť len na hodnote premenných, ktoré si častice môžu niesť zo sebou. Označme množinu týchto premenných λ_i , kde i označuje poradové číslo pokusu (budeme pracovať s mnohými časticami). Lokálnosť vyžaduje, aby λ_i nezáviseli od smeru merania (častica v mieste, kde sa nachádza Alica nesmie vedieť, v akom smere uskutočňuje meranie v tom okamihu Bob).

Napišme teraz identitu (3.7) pomocou skrytých premenných:

$$a(\lambda_i)(b(\lambda_i) - c(\lambda_i)) \equiv \pm(1 - b(\lambda_i)c(\lambda_i)), \quad (3.8)$$

Keďže nepoznáme λ_i pre jednotlivé pokusy, ani spôsob ako ovplyvňujú výsledok, rovnica (3.8) nám nedáva žiadnu informáciu. Môžeme ale urobiť priemer cez mnohé pokusy a dostávame vzťah nazývaný **Bellova nerovnosť**:

$$|\langle ab \rangle - \langle ac \rangle| \leq 1 - \langle bc \rangle, \quad (3.9)$$

kde $\langle ab \rangle$ je získané ako súčet všetkých $a(\lambda_i)b(\lambda_i)$ predelených počtom pokusov. Inými slovami je $\langle ab \rangle$ korelácia výsledkov meraní v smeroch \vec{n}_a a \vec{n}_b .

Pozrime sa teraz na kvantovú mechaniku. Tá tiež nedokáže predpovedať výsledky jedi ného pokusu, ale štatistické výsledky áno. Tieto výsledky sa naviac dajú experimentálne pozorovať, teda otázku, či je správna kvantová mechanika alebo existuje lokálna teória skrytých parametrov, môže vyriešiť správne postavený experiment. Korelácie v kvantovej mechanike sú dané vzájomnými uhlami medzi smermi merania. Ak označíme odklon smeru \vec{n}_a od definovanej osi α a podobne β a γ , nerovnica (3.9) nadobudne tvar

$$|\cos 2(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \gamma)| \leq 1 - \cos 2(\beta - \gamma). \quad (3.10)$$

¹SPS označuje skratku pre typ kaskády, kde elektróny postupne prechádzajú do nižšieho energetického stavu. Všeobecne zo stavu s_1 cez stav p_0 do stavu s_0 , presne to závisí vždy od typu použitých atómov.

Tu už nie je ale žiaden problém nájsť také uhly, pre ktoré by nerovnosť nebola splnená, sú to napríklad

$$\begin{aligned}\alpha &= 0^\circ \\ \beta &= 30^\circ \\ \gamma &= 60^\circ\end{aligned}\tag{3.11}$$

a môžeme teda písať, že za istých okolností kvantová mechanika **porušuje Bellove nerovnosti**.

Uvedme teraz jeden ešte názornejší príklad, podľa článku [18]. Uvážme konkrétny stav dvoch častíc so spinom $\frac{1}{2}$ v tvare

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle),\tag{3.12}$$

teda v stave s nulovým celkovým spinom. Budeme merať spin oboch častíc (znova si pomôžeme označením Alica a Bob) v rôznych smeroch. Označme tentokrát smer, v ktorom meria Alica ako \vec{n}_a a Bobov smer ako \vec{n}_b . Pravdepodobnosť, že nám oba aparáty oznámia výsledky +1, teda že oba spiny boli zmerané v smere otočenia meracieho Stern-Gerlachovho prístroja bude závislá len od vzájomného uhla medzi \vec{n}_a a \vec{n}_b (celkový spin je nulový a nie je teda dopredu určený žiaden významný smer) a bude daná

$$P_{++}(\vec{n}_a, \vec{n}_b) = \langle \psi^- | \frac{1}{2}(1 + \vec{n}_a \cdot \vec{\sigma}_1) \otimes \frac{1}{2}(1 + \vec{n}_b \cdot \vec{\sigma}_2) | \psi^- \rangle = \frac{1}{4}(1 - \cos \theta),\tag{3.13}$$

kde $\vec{\sigma}_1$ pôsobí na prvú a $\vec{\sigma}_2$ na druhú časticu a θ je uhol medzi \vec{n}_a a \vec{n}_b . Rovnakú pravdepodobnosť získame aj pre oba spiny otočené opačne, teda pre výsledky -1:

$$P_{--}(\vec{n}_a, \vec{n}_b) = \langle \psi^- | \frac{1}{2}(1 - \vec{n}_a \cdot \vec{\sigma}_1) \otimes \frac{1}{2}(1 - \vec{n}_b \cdot \vec{\sigma}_2) | \psi^- \rangle = \frac{1}{4}(1 - \cos \theta).\tag{3.14}$$

Zoberme teraz tri rôzne osi $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ s tým, že medzi každými dvoma bude uhol s kosínusom rovným $1/2$. Podľa kvantovej mechaniky platí pre súčet pravdepodobností namerať na jednotlivých dvojiciach osí spiny hore:

$$P(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + P(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3) + P(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}\tag{3.15}$$

Rovnako to bude aj pre oba spiny dole, spoločná pravdepodobnosť pre nameranie rovnakého spinu teda bude

$$P_{+++} + P_{---} = \frac{3}{4}.\tag{3.16}$$

Podľa klasickej fyziky ale táto pravdepodobnosť musí byť rovná jednej! Ak je totiž priemet spinu na každú os určený dopredu, mám k dispozícii tri osi a len dva možné výsledky merania (hore-dole), **musí** aspoň na jednej dvojici osí padnúť rovnaký spin. Rovnako, ako keď mám v ruke tri mince a hodím ich na stôl. Nech sa deje, čo sa deje, vždy mi padnú aspoň dva znaky alebo dve hlavy, žiaden iný výsledok nie je možný.

3.3 CHSH nerovnosť

Pri odvodzovaní Bellovej nerovnosti² sme vybrali špeciálny prípad. Hoci oba meracie prístroje, Alica aj Bob, mali každý možnosť vybrať si jeden z dvoch smerov, v ktorých budú merať polarizácie, bolo tam nie veľmi vysvetlené obmedzenie, že dva z týchto štyroch smerov musia byť rovnaké. Vskutku nie je problém sformulovať podobnú nerovnosť ako (3.9) aj pre 4 nezávislé smery. Zavedme teda smer \vec{n}_d a výsledok merania v tomto smere d , ktorý pochopiteľne tiež nadobúda hodnoty ± 1 . Úlohu identity (3.7) spĺňa

$$(a + c)b + (a - c)d \equiv \pm 2, \quad (3.17)$$

znova môžeme prejsť k závislosti od skrytých parametrov a urobiť stredné hodnoty. Dostávame nerovnicu

$$|\langle ab \rangle + \langle bc \rangle + \langle cd \rangle - \langle da \rangle| \leq 2. \quad (3.18)$$

Tento výsledok je nazývaný Clauser-Horne-Shimony-Holtova nerovnosť [18]. Rovnako ako Bellova nerovnosť aj CHSH nerovnosť určuje horné orhaničenie pre korelácie v teóriách lokálnych premenných. V kvantovej mechanike má (3.18) tvar

$$|\cos 2(\alpha - \beta) + \cos 2(\beta - \gamma) + \cos 2(\gamma - \delta) - \cos 2(\delta - \alpha)| \leq 2. \quad (3.19)$$

Napríklad ale pre výber uhlov

$$\begin{aligned} \alpha &= 0^\circ \\ \beta &= 22.5^\circ \\ \gamma &= 45^\circ \\ \delta &= 67.5^\circ \end{aligned} \quad (3.20)$$

nadobúda ľavá strana rovnice (3.19) hodnotu $2\sqrt{2}$, čo je zjavne viac ako 2.

Zaujímavá otázka je, ako veľmi môže stav v kvantovej mechanike porušiť CHSH nerovnosť. Zistili sme, že sa dá nájsť taká konfigurácia experimentu, aby ľavá strana rovnice nadobudla hodnotu $2\sqrt{2}$. Je možné nájsť iné, lepšie konfigurácie, kde je táto hodnota ešte väčšia?

Uvážme operátor

$$\mathbf{C} = \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{cd} - \mathbf{da}, \quad (3.21)$$

kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ sú operátory merajúce polarizáciu a ich kvadrát je vždy rovný 1. Na základe toho môžeme písať

$$\mathbf{C}^2 = 4 + [\mathbf{a}, \mathbf{b}] [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \quad (3.22)$$

a v suprémovej norme pre operátor \mathbf{C} platí

$$\|\mathbf{C}^2\| \leq 4 + 4 \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\| \cdot \|\mathbf{d}\| = 8. \quad (3.23)$$

Pre samotný operátor dostávame podmienku

$$\|\mathbf{C}\| \leq 2\sqrt{2}. \quad (3.24)$$

Hodnota operátora nemôže nikdy prekročiť hodnotu $2\sqrt{2}$ (nerovnosť (3.24) sa nazýva Cirelsonova nerovnosť). Keďže sme našli prípad, v ktorom dosahujeme rovnosť, našli sme aj maximálnu hodnotu.

²Označenie "Bellove nerovnosti" má svoj užší a širší význam. V tom prvom sa pod nimi chápe len nerovnosť popísaná v predchádzajúcej sekcii a takto budem pojem používať aj v tejto práci. Širší význam obsahuje všetky možné nerovnosti, ktorých porušenie indikuje kvantovomechanické vlastnosti systému, patrili by tam teda aj tu spomínaná CHSH nerovnosť i ďalšie mnohočasticové nerovnosti.

3.4 Experimentálne potvrdenie

Publikovanie Bellovho článku samozrejme viedlo k tomu, že sa mnohí experimentátori snažili navrhnúť a zrealizovať experimenty, ktoré by dokázali rozhodnúť, či sú alebo nie sú Bellove nerovnosti porušované. Jedny z prvých dôležitých výsledkov publikoval v roku 1976 Ed Fry [17]. V tom čase ešte rôzne vedecké skupiny publikovali rôzne výsledky, z ktorých niektoré potvrdzovali porušovanie nerovností a iné nie. Nebolo jasné, či sa jedná o nedostatočne presné meranie, alebo ide o závislosť od typu vystavaného experimentu. Citovaný článok s dovedy najvyššou presnosťou ukázal porušovanie Bellových nerovností a tiež vynikajúcu zhodu s očakávanými výsledkami tak, ako boli spočítané pomocou kvantovej mechaniky, so zarátaním neurčitostí detektorov a experimentálneho zariadenia ako celku.

Napriek tomu ale trvalo viac ako dve desiatky rokov, kým boli zaznamenané prvé skutočné úspechy pri experimentálnom potvrdzovaní porušenia Bellových nerovností. Dôvod bol veľmi prozaický: na vylúčenie všetkých možných lokálnych teórií potrebujeme experiment, ktorý má k dokonalosti a ideálnosti veľmi blízko. Základný problém, s ktorým sa experimenty potýkali, bol problém lokálnosti, tzv. locality loophole. Na to, aby platili všetky predpoklady pre nerovnosti nesmie byť jasné postavenie experimentu v čase, keď ešte nie sú dve častice (či už spiny alebo polarizované fotóny), ktoré neskôr použijeme pre experiment, separované priestorovým intervalom. Inak povedané, celé experimentálne zariadenie by sme mali začať stavať až v okamihu, keď obe častice od seba separujeme. Toto je samozrejme ťažko predstaviteľné, hlavne pokiaľ zamýšľame používať fotóny, ktoré za jedinú sekundu preletia mnohonásobok vzdialeností bežných na Zemi. Ale v skutočnosti stačí oveľa jemnejšia podmienka, ktorú musíme splniť: musíme v čase medzi priestorovou separáciou a detekciou častíc (takpovediac "za letu") zmeniť podmienky experimentu.

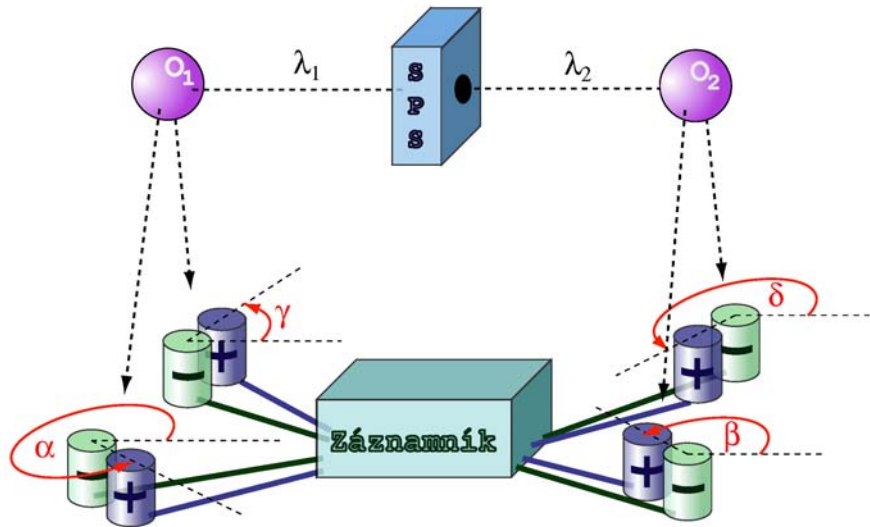
Toto sa prvýkrát úspešne podarilo realizovať A. Aspectovi [13] vo svojich pokusoch v roku 1982, v ktorých použil polarizované fotóny. Zjednodušená schéma je znázornená na obrázku (3.1). Dva fotóny z kalciovej kaskády SPS boli produkované na vlnových dĺžkach 422,7 nm a 551,3 nm. Prechádzali kolimátorom a optoakustickými spínačmi, ktoré pre každý z fotónov pseudonáhodne vyberali dva analyzátory s rôznymi smermi polarizácie. Spínače menili svoju polohu s rôznymi frekvenciami a niekoľkonásobne rýchlejšie, ako bol čas letu fotónu z kaskády (vzdialenosť 12 metrov zodpovedá času asi 40 nm, pričom stredný čas medzi prepnutiami bol cca 10 nm).

Výsledky boli jednoznačné, Bellove nerovnosti boli porušené o viac ako 5 štandardných odchýliek. Stále však neboli vyriešené ďalšie problémy, ktoré aj v tomto prípade umožňovali vytvorenie teórie so skrytými parametrami tak, aby vysvetľovala výsledky Aspectovho experimentu.

Dva fotóny vychádzajúce z kaskády nemajú rovnaké vlnové dĺžky, preto sú v skutočnosti rozlíšiteľné. Nejedná sa teda, ak vezmeme do úvahy aj frekvenciu (energiu) fotónov, o stav typu $|\psi\rangle$ či podobný, o ktorom pojednávajú nerovnosti, ale o stav typu

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1E_1\rangle|0E_2\rangle + |0E_1\rangle|1E_2\rangle), \quad (3.25)$$

ktorý môže spôsobovať problémy. Ďalšia medzera v experimente, ktorá umožňovala tvorbu lokálnych teórií, bola len pseudonáhodnosť preklápania analyzátorov v experimente. Túto dieru (loophole) "zatvoril" až Zeilinger et. al. [14] experimentom, kde využil nie pseudonáhodný, ale naozaj náhodný proces na zmenu parametrov experimentu. V dvoch laboratóriách

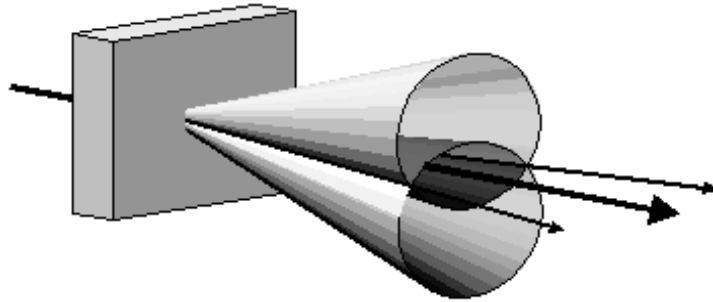


Obrázok 3.1: Schéma Aspectovho experimentu. Fotóny vlnových dĺžok λ_1 a λ_2 letia zo spoločného zdroja (SPS kaskády) v korelovanom stave. Optické prepínače O_1 a O_2 (pseudo) náhodne pre každý fotón vyberú analyzátor α, γ , resp. β, δ a výsledky sa porovnávajú a uchovávajú v záznamníku.

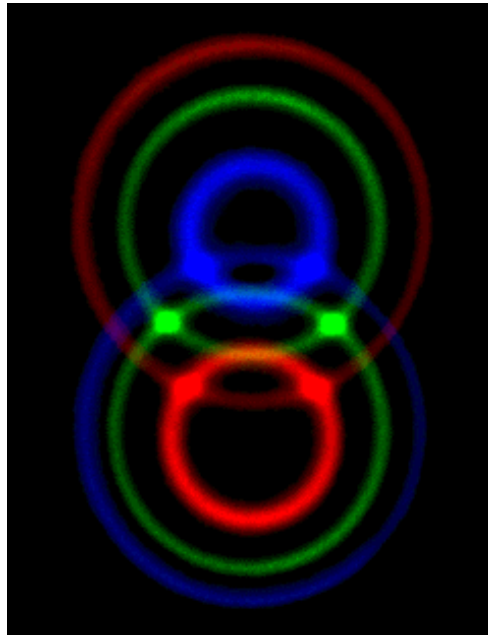
v Innsbrucku, vzdialených od seba 400 metrov, prebiehali merania polarizovaných fotónov, ktoré boli produkované v spoločnom zdroji (laser Down-conversion typu II, obrázok (3.2), fotografia (3.3), zdroj obrázkov [14]).

Interval medzi meraniami bol vždy priestorupodobný a podmienky experimentu sa menili náhodne. Schéma je znázornená na obrázku (3.4) [14]. Napriek všetkému, aj pre výsledky posledne popisovaného experimentu je možné zostaviť lokálnu teóriu. Posledná veľká medzera, ktorá čaká na experimentátorov, je detection loophole, problém detektorov [16]. Nedá sa totiž vylúčiť, že účinnosť detektorov je akýmsi spôsobom závislá od toho, v akom celkovom stave sa fotóny nachádzajú, alebo, povedané v reči lokálnych premenných, od hodnôt lokálnych premenných.

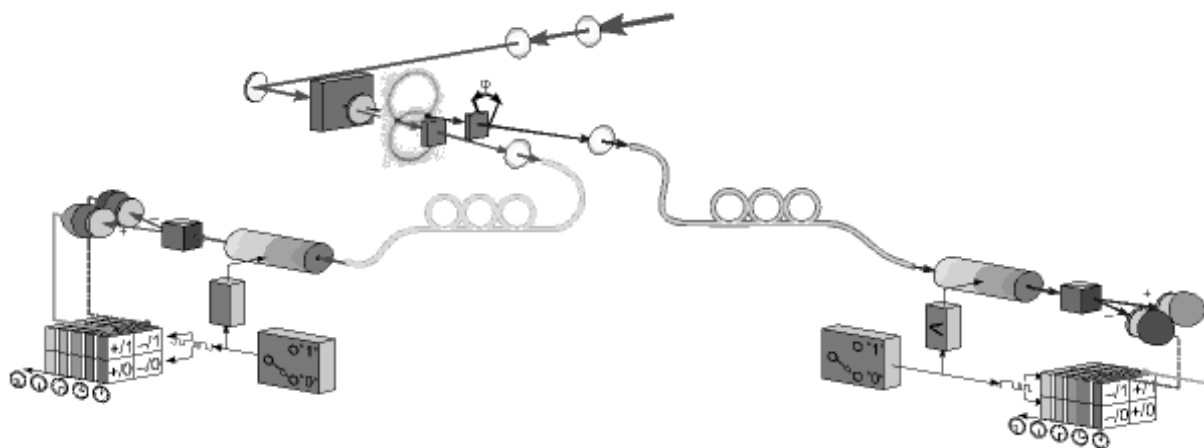
Na prekonanie tejto medzery by sme potrebovali detektory, ktorých účinnosť je dostatočne vysoká (Účinnosť každého detektora je ohraničená zhora číslom jedna. Ak sú skutočné účinnosti ďaleko menšie ako jedna, máme možnosť navrhnúť takú závislosť týchto účinností od skrytých parametrov, aby "simulovala" kvantové výsledky, ale zároveň neporušovala ohraničenie. Pri dostatočne vysokých priemerných účinnostiach detektorov už nie je možné takúto závislosť navrhnúť, lebo pre isté hodnoty lokálnych premenných by požadovala účinnosť detektorov vyššiu ako jedna). V dnešnej dobe ešte stále nie sú k dispozícii podobné detektory, preto, hoci málo pravdepodobná, stále tu zostáva možnosť, že "všetko je inak". Že v skutočnosti je svet naozaj lokálny a všetky doterajšie výsledky, ktoré potvrdzovali kvantovú mechaniku, boli len chybným priblížením skutočného stavu.



Obrázok 3.2: Laser down-conversion druhého typu. V nelineárnom kryštáli sú produkované dva lúče, riadny a mimoriadny. Na obrázku sú znázornené dvoma kuželmi. V prieseku kuželov môžu vznikáť fotónové páry, ktoré sú v kvantovo korelovanom stave.



Obrázok 3.3: Fotografia lúča, ktorý prešiel nelineárnym kryštálom. Na priesečníkoch kružníc môžu vznikáť entanglované páry fotónov.



Obrázok 3.4: Na obrázku je znázornená podrobná schéma experimentu prevádzaného v Innsbrucku. Dva entanglované fotóny získané zo spoločného zdroja prechádzajú dlhé trasy svetelnými vláknami. Náhodný prepínač založený na parametrickej konverzii druhého typu zabezpečuje výber smeru, v ktorom bude analyzovaná polarizácia toho-ktorého fotónu. Potom nasleduje už len analyzátor a archivačné zariadenie.

3.5 Dvojčasticové previazanie

Z vyššie uvedeného je zrejmé, že v kvantovej mechanike existujú stavy, ktoré porušujú lokálnosť, na akú sme zvyknutí z bežného života. Napríklad dve častice so spinom $1/2$, pokiaľ sú vo vhodnom stave (napríklad už definovaný $|\psi^-\rangle$), udržiavajú si medzi sebou akési "puto". Nie je dopredu určený spin prvej častice, môže rovnako dobre (s pravdepodobnosťou 50%) byť smerom hore aj dole. Ak ho raz však zmeriame, určíme aj výsledok prípadného neskoršieho merania spinu na druhej častici v tom istom smere. Nezávisle na tom, ako je ďaleko, priestorovo alebo časovo.

Na jednej strane je ťažko predstaviteľné, ako sa informácia o našom meraní môže dostať k druhej častici (čo bol presne bod, ktorý bol považovaný v článku [2] za nemožný). Z pohľadu kvantovej mechaniky sa ale nejedná o dva systémy, ale o jeden jediný systém v stave $|\psi^-\rangle$, ktorý sa zmenil ako celok po zmeraní spinu na prvej častici. A medzi dvoma časťami jedného systému vzniká väzba, previazanie. Hovoríme, že dve časti systému sú previazané (entanglované), resp. neseparovateľné, ak nemôžu byť vytvorené pomocou dvoch preparátorov stavov, ktoré si môžu navzájom vymieňať len klasické informácie.

Vyvstáva samozrejme otázka, ako zistiť, či je daný stav $|\Phi\rangle$, rozdelený na dva podsystemy, previazaný alebo nie. Núka sa použiť Bellove nerovnosti; pokiaľ ich stav porušuje, určite previazaný je. Bohužiaľ, táto podmienka je len postačujúca, nie je nutná. Existujú previazané stavy (v zmysle definície uvedenej vyššie), ktoré Bellove nerovnosti neporušujú. Ďalšia otázka, hlavne v súvislosti s experimentami, je separovateľnosť či neseparovateľnosť zmesí vyjadrených maticami hustoty ρ .

3.5.1 Bellove stavy

Pri práci s previazanými stavmi dvoch častíc sa ukazuje, že je veľmi výhodné zaviesť okrem normálnej bázy, ktorú pre dve dvojhladinové častice používame a je typu

$$\begin{aligned} &|0\rangle|0\rangle \\ &|0\rangle|1\rangle \\ &|1\rangle|0\rangle \\ &|1\rangle|1\rangle, \end{aligned} \tag{3.26}$$

aj bázu inú. Stavy (3.26) sú úplným systémom v dvojrozmernom Hilbertovom priestore, ale pochopiteľne nie sú jediným možným a správnym výberom. Používame ich často preto, lebo poskytujú intuitívnu predstavu o klasickom stave dvoch systémov popísaných pomocou týchto vektorov. Všetky bázové vektory sú faktorizované a teda predstaviteľné v rámci klasického prístupu. Z matematického hľadiska ale úplne ekvivalentnú bázu tvoria 4 previazané, takzvané Bellove stavy, definované nasledovne

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) \\ |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) \\ |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Tieto stavy sú ďaleko ťažšie predstaviteľné, ale uľahčia mnoho námahy a vypisovania v ďalších častiach práce.

3.5.2 Kritériá separability pre častice so spinom 1/2

Ľubovoľná matica hustoty ρ je separovateľná (nie je previazaná) vtedy a len vtedy, ak sa dá zapísať v tvare

$$\rho = \sum_A w_A \rho'_A \otimes \rho''_A, \tag{3.28}$$

kde ρ'_A a ρ''_A sú matice hustoty jednotlivých podsystémov. Avšak nie je, ako by sa mohlo zdať, jednoduché o neznámom stave (špeciálne zmesi) určiť, či je alebo nie je separabilný. Mnoho stavov, ktoré nie sú separabilné podľa definície (3.28), neporušujú Bellove nerovnosti.

Pre taký jednoduchý systém ako dve častice spinu 1/2 je úplnou a postačujúcou podmienkou na určenie separability konštrukcia čiastočne transponovanej matice hustoty [19], známej tiež pod skratkou PPT (alebo Peresova podmienka), v tvare

$$\sigma = \sum_A w_A (\rho'_A)^T \otimes \rho''_A. \tag{3.29}$$

Aj transponovaná matica hustoty spĺňa všetky podmienky na maticu hustoty (jednotková stopa a nezápornosť), preto zákonite σ musí mať všetky vlastné hodnoty nezáporné. Ak

to nie je splnené, dochádzame do sporu s predpokladom z rovnice (3.28) , teda že pôvodná matica hustoty sa dá rozložiť a je separovateľná. Samotný dôkaz, že každá neseperabilná matica hustoty pre systémy 2×2 (dve častice spinu $1/2$) má zápornú aspoň jednu z vlastných hodnôt uviedli až Horodecki v článku [21].

Uvedme teraz príklad. Uvážme pár častíc so spinom $1/2$, ktoré su v takzvanom Wernerovom (zmiešanom) stave [20]

$$\rho_{m\mu,n\nu} = xS_{m\mu,n\nu} + (1-x)\delta_{m\mu}\delta_{n\nu}/4, \quad (3.30)$$

kde x je parameter určujúci podiel singletu S a

$$S_{01,01} = S_{10,10} = -S_{01,10} = -S_{10,01} = \frac{1}{2}, \quad (3.31)$$

pričom ostatné komponenty matice S sú nulové. V maticovom tvare to môžeme zapísať tako:

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{(1-x)}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+x)}{4} & -\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{2} & \frac{(1+x)}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-x)}{4} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Zmes sa vo všeobecnosti nedá zapísať vo forme ket-vektora, ktorú sme doteraz na zápis stavov používali. Samotný singlet S je ale stav čistý, zapísateľný v tvare

$$S = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|, \quad (3.33)$$

kde stav $|\psi^-\rangle$ je jeden zo stavov Bellovej bázy.

Operátor čiastočnej transpozície pôsobiaci na maticu (3.32) sa dá zapísať vo forme

$$PPT = T \otimes I, \quad (3.34)$$

čo v preklade znamená, že na časť matice zodpovedajúcu prvej častici pôsobí ako transpozícia a na časť zodpovedajúcu druhej častici ako identita. Operátor transpozície pre maticu 2×2 môžeme zapísať v tvare

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

a operátor identity je jednotková matica 4×4 . Výsledný operátor PPT bude teda matica 16×16 .

Čiastočne transponovaná matica hustoty má tvar

$$\rho^{T_1} = \begin{pmatrix} \frac{(1-x)}{4} & 0 & 0 & -\frac{x}{2} \\ 0 & \frac{(1+x)}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+x)}{4} & 0 \\ -\frac{x}{2} & 0 & 0 & \frac{(1-x)}{4} \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

A vlastné hodnoty ρ^{T_1} sú trikrát $\frac{1+x}{4}$ a raz $\frac{1-3x}{4}$. Stav je teda určite previazaný pre $x > \frac{1}{3}$, Bellove nerovnosti sú porušované ale iba pri $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.5.3 Miery previazania

V predchádzajúcej časti som sa venoval tomu, ako sa dá pre známy stav systému zistiť, či je alebo nie je separabilný. To však samozrejme je len časť informácie. Ak vieme, že systém je previazaný, má dobrý zmysel sa pýtať, nakoľko. Je intuitívne jasné, že napríklad stav

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \quad (3.37)$$

je silnejšie previazaný ako stav

$$|\phi\rangle = \alpha|10\rangle + \beta|\psi^+\rangle \quad \alpha \longrightarrow 1, \quad (3.38)$$

ktorý je z veľkej časti zložený zo separabilného stavu a len malé jeho percento tvorí previazanú časť. Preto je potrebné a žiaduce zaviesť pre previazanie mieru.

Táto miera by mala spĺňať niektoré požiadavky. Ak nazveme všeobecnú mieru previazania nejakej matice hustoty $E(\rho)$, sú to napríklad tieto [24]:

- $E(\rho) \geq 0$ pozitivita
- $E(\rho) = 0 \iff \rho$ je separabilná
- $E(|\psi^+\rangle\langle\psi^+|) = 1$ normalizovanosť na maximálne previazaných stavoch
- $E(\rho_1 \otimes \rho_2) = E(\rho_1) + E(\rho_2)$ aditivita
- $E(\rho) = E(U_A \otimes U_B \rho U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger)$ lokálne unitárne operácie nemenia hodnotu miery previazania
- pri lokálnych (neunitárnych) operáciách len na jednom podsysteme sa nesmie previazanie zväčšovať.

Samozrejme, podmienky je možné rozšíriť podľa toho, aké obmedzenia sme ochotní prijať, uvedené sú však ťažko spochybniteľné. Netriviálna je len posledná, tú však musíme vyžadovať, aby sme zabezpečili citlivosť miery práve na previazanie, entanglement, ktorá sa nemôže pri lokálnych operáciách zväčšovať.

Previazanie čistých stavov

Pre čisté stavy existuje všeobecná zhoda na miere. Tá je určená entropiou systému, vzniknutého z pôvodného stavu spravením čiastočnej stopy cez jeden z podsystemov

$$E(\psi) = -\text{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\text{Tr}(\rho_B \log_2 \rho_B), \quad (3.39)$$

kde A, B sú jednotlivé podsystemy, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ a ρ_A , resp. ρ_B je matica hustoty so spravenou čiastočnou stopou cez druhý podsystem. Obe tieto entropie (získané z matice redukovanej na časticu A alebo B) sú rovnaké a spĺňajú všetky hore uvedené podmienky. Pre každú inú mieru, ktorú v ďalšom zavedieme, budeme preto tiež žiadať, aby pre čisté stavy prechádzala na entropiu systému.

Logika tejto miery je v skutočnosti jednoduchá. Vieme, že entropia (v istom zmysle) vypovedá o "miere neporiadku" v systéme, alebo tiež o tom, nakoľko neurčito je systém daný.

Pokiaľ je ale celý systém v čistom stave, jeho entropia je nulová, celá neurčitost' v určení podsystemu pochádza s väzby, ktorá viedla do druhej časti systému a bola "pretrhnutá". Čím bola väzba, previazanie silnejšie, tým väčší neporiadok (entropiu) jej pretrhnutie v podsysteme spôsobilo.

Previazanie formovania, konkurencia

Pre zmiešané systémy je zavedenie miery ďaleko komplikovanejšie a neexistuje dosiaľ jednoznačná zhoda, ktorá by mala byť tá správna. Entropia systému pre zmiešaný stav nevyhovuje, lebo nespĺňa podmienku 2, teda aj pre separabilné, klasicky korelované stavy nám dáva nenulové previazanie.

Jedným z možných kandidátov je tzv. previazanie formovania. Motivácia pre jeho zavedenie je jednoduchá. Ak máme k dispozícii nejaký stav, môžeme sa pýtať, koľko maximálne previazaných stavov potrebujeme na jeho prípravu. V tomto prípade je uvažovanie trochu abstraktné (ťažko sa predstavuje použitie necelého čísla stavov), ale ak uvážime mnohonásobnú kópiu nášho stavu $\rho^{\otimes N}$, pre veľké N je otázka úplne legálna.

Každá matica hustoty sa dá napísať v mnohých rozkladoch typu $\rho = \sum_i p_i |\psi\rangle_{ii} \langle\psi|$. Potom previazanie formovania matice hustoty ρ je minimum váženého priemeru previazania čistých stavov jej dekompozície cez všetky možné dekompozície:

$$E_F(\rho) = \min_{|\psi\rangle} \sum_i p_i E(|\psi\rangle_i). \quad (3.40)$$

Samozrejme, tu sa stretávame s problémom pri výpočte, ako minimalizovať analyticky cez všetky dekompozície. Preto je jeho priamy výpočet a použitie veľmi problematické.

Lepšou formou previazania formovania špeciálne pre dva dvojrozmerné systémy je konkurencia. Je vhodná kvôli jednoduchému výpočtu a prehľadnosti. Pre jej vyjadrenie si musíme definovať konjugovanú maticu hustoty

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (3.41)$$

Čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ nech sú odmocniny vlastných hodnôt matice

$$R = \rho \tilde{\rho} \quad (3.42)$$

zoraďené nerastúco v uvedenom poradí. Konkurencia pôvodnej matice hustoty ρ potom je [25]

$$C(\rho) = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4). \quad (3.43)$$

Keďže previazanie formovania rastie monotónne s konkurenciou daného stavu, kde [26]

$$E_F(C) = h\left(\frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \quad (3.44)$$

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x), \quad (3.45)$$

sú tieto miery prakticky rovnocenné³. Napriek tomu, že hodnota konkurencie nemá (na rozdiel od previazania formovania) jednoduchú interpretáciu, pre dvojhladinové systémy (qubity) sa ujala ako jediná používaná miera a prepočet na previazanie formovania sa robí len veľmi zriedka.

³Nie je možné analyticky vyjadriť konkurenciu z previazania formovania. Keďže však zväčša dokážeme spočítať práve konkurenciu a z nej vyjadrujeme previazanie formovania, je takáto "jednosmernosť" minimálnym problémom.

Previazanie destilácie

Presne opačným spôsobom ako previazanie formovania je definované previazanie destilácie. Nezaujíma nás, koľko Bellových stavov potrebujeme na vytvorenie nášho stavu ρ , ale naopak, koľko maximálne previazaných stavov dokážeme z nášho stavu vytvoriť, vydestilovať (samozrejme aj tu rátame s mnohými kópiami). Definujeme ho

$$E_D(\rho) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S(\rho_A^{\otimes N}). \quad (3.46)$$

Pochopiteľne, pre čisté stavy bude previazanie destilácie rovné previazaniu formovania, pri lokálnych operáciách na čistých stavoch sa miera previazania zachováva. Nepoznáme však spôsob, ako jednoducho vyčísliť previazanie destilácie pre zmiešaný stav.

Pre dvojhladinové systémy, ktoré su hlavnou náplňou tejto práce, nemá previazanie destilácie natoľko veľký význam ako pri väčších systémoch. V tom prípade sa totiž môže systém nachádzať v stave, ktorý je previazaný (nedá sa zapísať ako suma súčinov matíc hustoty) a má aj nenulové previazanie formovania, ale jeho previazanie destilácie je nulové. To znamená, že nemôžeme z tohoto stavu, ani z ľubovoľného počtu jeho kópií lokálnymi operáciami a klasickou komunikáciou získať žiadnu kópiu maximálne previazaného, napríklad Bellovho stavu. A to napriek tomu, že na jeho prípravu sme previazané stavy potrebovali. Viac informácií sa dá nájsť napríklad v článku [27].

Relatívna entropia

Ďalšou mierou previazania je relatívna entropia [24]. Odráža trochu iný pohľad na problém, keď sa nezaujíname o vývoj daného stavu, ale skôr o jeho polohu v priestore všetkých stavov.

Predstavme si množinu všetkých možných stavov daného systému, zloženého z dvoch podsystémov, ktorých previazanie chceme skúmať. Potom v tejto množine existuje podmnožina všetkých stavov systému, ktoré nie sú previazané. Ak by sme boli schopní vybrať z týchto stavov nejakým spôsobom vždy jeden, ktorý by kánonicky zodpovedal danému, skúmanému stavu ρ a dokázali definovať vhodnú vzdialenosť na množine stavov, mohla by práve táto vzdialenosť (stavu ρ od priradeného stavu z množiny separabilných stavov) reprezentovať mieru previazania. Ako prirodzený separabilný stav k neznámemu stavu ρ sa núka stav $\rho_A \otimes \rho_B$, kde ρ_A je matica hustoty zredukovaná len na systém A , teda

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) \quad , \quad \rho_B = \text{Tr}_A(\rho). \quad (3.47)$$

Možnosť ale samozrejme je aj nešpecifikovať dopredu, vzdialenosť od ktorého zo separabilných stavov budeme uvažovať, ale definovať previazanie ako minimum vzdialenosti ku všetkým separabilným stavom.

Teraz je potrebné zaviesť vhodnú mieru vzdialenosti na množine stavov. Nie všetky vzdialenosti totiž spĺňajú podmienky, ktoré kladieme na mieru previazania (hlavne požiadavka, aby pre čisté stavy prechádzala miera na entropiu systému). Okrem toho, z praktických dôvodov, hľadáme vzdialenosť čo možno najjednoduchšiu, umožňujúcu analytickú minimalizáciu cez množinu stavov. Jedna z kandidátok je relatívna entropia dvoch stavov

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr}(\rho \ln \rho - \rho \ln \sigma). \quad (3.48)$$

Funkcia (3.48) nie je vzdialenosťou v matematickom zmysle slova. Chýba jej napríklad základná vlastnosť, symetria. Napriek tomu, relatívna entropia spĺňa všetky podmienky na zavedenie miery previazania v tvare

$$E_{RE}(\rho) = \min_{\sigma \in Sep} S(\sigma || \rho), \quad (3.49)$$

kde Sep je množina separabilných stavov. (Pokiaľ by sme neuvažovali minimalizáciu, ale zobrali kánonický separabilný stav $\rho_A \otimes \rho_B$, jednalo by sa o von Neumannovu vzájomnú informáciu. Táto sa ale môže zvyšovať pomocou lokálnych operácií kombinovanými s klasickou komunikáciou, teda nie je citlivá na rozdiel medzi klasickými a kvantovými koreláciami).

V článku [23] je ukázané, že všetky miery previazania, spĺňajúce horeuvedené kritériá plus niektoré ďalšie týkajúce sa asymptotického správania sa pri veľkom množstve uvažovaných častíc, musia spĺňať pre každý stav podmienku

$$E_D \leq E \leq E_F, \quad (3.50)$$

kde E_D je previazanie destilácie a E_F je previazanie formácie.

3.6 Viacčasticové previazanie

3.6.1 Trojčasticový model

V predchádzajúcej kapitole som sa venoval výlučne dvojčasticovému previazaniu. Bellove a CHSH nerovnosti ukazujú, že na to, aby sme mohli rozlíšiť, či sú dve častice v previazanom stave, potrebujeme štatistický súbor rovnakých stavov. Až na základe merania tohoto súboru dokážeme rozlíšiť kvantové vlastnosti.

V prípade troch častíc je už situácia iná. Na základe jediného experimentu dokážeme odlíšiť stav, ktorý vykazuje trojčasticové previazanie. Zoberme tri častice v stave

$$|\psi\rangle = \left(\frac{|0\rangle|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.51)$$

a operátory priemetu spinu i -tej častice na os x , y a z

$$\sigma_{ix}, \sigma_{iy}, \sigma_{iz}. \quad (3.52)$$

Všetky tri častice sú priestorovo separované. Z operátorov (3.52) môžeme konštruovať ďalšie, pričom platia vzťahy

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y}|\psi\rangle \\ &= \sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{3y}|\psi\rangle \\ &= \sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x}|\psi\rangle \\ &= -\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x}|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Označme výsledky príslušných meraní m_{ix}, m_{iy}, m_{iz} . Tieto budú nadobúdať len hodnoty ± 1 . Z (3.53) vyplýva podmienka

$$m_{1x}m_{2x}m_{3x} = -1, \quad (3.54)$$

ale musí tiež platiť

$$m_{1y}m_{2x}m_{3x} = m_{1x}m_{2y}m_{3x} = m_{1x}m_{2x}m_{3y} = 1. \quad (3.55)$$

Keďže vieme, že $m_{iy}^2 = 1$, skombinovaním (3.55) dostávame výsledok

$$m_{1x}m_{2x}m_{3x} = 1, \quad (3.56)$$

čo je v jasnej kontradikcii s výsledkom (3.54).

Vysvetlenie sa skrýva na rovnakom mieste, ako to bolo pri Bellových nerovnostiach. Na každej častici môžeme previesť iba jeden z experimentov merania priemetu spinu na os x či y . Ak ale uznávam argument Einsteinovej reality, musím predpokladať, že oba tieto výsledky sú dopredu dané, lebo sú s istotou predpovedateľné na základe merania iných, priestorovo vzdialených častíc. Tu sa dostávam okamžite do sporu, bez toho, aby som potreboval robiť štatistický priemer.

3.6.2 Čo je viacčasticové previazanie?

V prvom rade je potrebné si ujasniť, čo vlastne v kontexte viacerých častíc previazanie znamená. Najlepšie sa to vysvetlí na konkrétnom prípade troch častíc, nazvime si ich Alica, Bob a Carlos. Hovoríme, že stavy Alice a Boba sú *dvojčasticovo* previazané, ak vykazujú kvantové (klasické nestačia) korelácie bez ohľadu na to, v akom stave sa nachádza Carlos. Inak, A a B sú previazané, ak matica hustoty

$$\rho_{AB} = \text{Tr}_C(\rho_{ABC}) \quad (3.57)$$

je neseparabilná.

Táto definícia ale nemusí byť jediná. Skrýva v sebe totiž problém: ak by Carlos, hoci vzdialený od Alice a Boba, začal s nimi spolupracovať a vykonával by operácie podľa ich pokynov, previazanie medzi Alicou a Bobom môže vzniknúť. Zoberme si ako príklad stav

$$|\psi\rangle = \left(\frac{|0\rangle|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.58)$$

kde jednotlivé qubity postupne reprezentujú stavy Alice, Boba a Carlosa. Matica hustoty ρ_{AB} zodpovedá zmiešanému, klasicky korelovanému, ale separabilnému stavu. Pokiaľ požiadame o spoluprácu Carlosa, ktorý vykoná merania vo vhodnej báze, môžeme stav $|\psi\rangle$ prerobiť na úplne previazaný stav Alice a Boba, ktorý bude separovaný od Carlosovho stavu. Tento stav totiž obsahuje previazanie trojčasticové, ale neobsahuje žiadne previazanie dvojčasticové, ktoré by mohli dvaja z trojice získať bez toho, aby tretí spolupracoval.

Priamočiarym spôsobom sa dá táto argumentácia zovšeobecniť aj na viacčasticové systémy. Definujeme preto stavy typu (3.58):

$$|\Phi\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{N}} (|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}). \quad (3.59)$$

Nazývame ich Greenberger-Horne-Zeilingerove stavy (GHZ stavy) alebo tiež stav zovšeobecenej Schrödingerovej mačky (Dôvod je prozaický, tento stav skutočne zodpovedá, pre dostatočne veľké N , stavu mačky v uzavretej krabici. Buď je celá živá, alebo celá mŕtva, nič medzi

tým). Tieto stavy obsahujú vždy práve N -časticové previazanie, matica hustoty získaná stopou cez ktorúkoľvek časticu zo systému reprezentuje zmiešaný, separabilný stav.

Všeobecný stav N častíc môže obsahovať rôzne druhy previazania. Jednak, samozrejme, n -časticové, ale to nie je jediná možnosť. Niektoré dvojice, trojice, alebo k -tice môžu byť previazané medzi sebou (ak vôbec) silnejšie ako so zvyškom systému. Napríklad pri troch časticách existujú dva základné typy previazania. Jeden je reprezentovaný už definovanými GHZ stavmi, druhý W stavmi, ktoré sú vo všeobecnosti definované pre N častíc ako stavy symetrické vzhľadom k zámene ľubovoľných dvoch častíc a obsahujúce práve 1 qubit v stave 1 a ostatné v stave 0. W_3 -stav definujeme ako

$$|W_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \quad (3.60)$$

W stavy majú najsilnejšie možné dvojčasticové previazanie na rozdiel od GHZ stavov, ktoré vykazujú silné mnohočasticové previazanie.

3.6.3 Kritériá separability

Pre viacčasticové previazanie musíme znova definovať, čo vlastne znamená separabilný stav. Pokiaľ sa pýtame na separabilitu medzi dvoma časťami systému, zostáva definícia rovnaká ako pre dvojčasticový prípad. Tak isto sú použiteľné už uvedené kritériá, pretože efektívne sa nezaobráame viacčasticovým systémom, ale systémom dvoch častí s viacerými stupňami voľnosti. Nie je zaujímavé, či v časti A máme jeden osemhladinový atóm alebo tri qubity, efektívne je to osemrozmerný systém.

Ako nutnú podmienku separability môžeme aj pre väčšie systémy používať Peresovu čiastočnú transpozíciu (PPT) matice hustoty. Stále síce platí, že podmienka PPT je vždy lepšou podmienkou ako Bellove nerovnosti zovšeobecnené pre viac častíc, ale existujú stavy spĺňajúce PPT, ktoré nie sú separabilné (nedajú sa zapísať v tvare (3.29)). Takéto stavy nazývame stavy so skrytým previazaním (bound entangled states). Sú to zmiešané stavy s nulovým previazaním destilácie, ale nenulovým previazaním formovania. Množina týchto stavov nie je ešte dokonale preskúmaná a preto nie je ešte ani celkom jasné a jednoznačné, či sa vôbec tieto stavy majú chápať ako stavy previazané. Faktom však zostáva, že ak máme k dispozícii čo len jeden maximálne previazaný (bellov) stav, s jeho použitím ako katalyzátora môžeme aj zo stavov so skrytým previazaním previazanie vydestilovať. Celá táto diskusia by však patrila skôr do kapitoly o dvočasticovom previazaní mnohorozmerných systémoch, ktorému sa v tejto práci venovať nebudem.

Otázka na separabilitu stavu však môže stáť aj inak. Ak mám systém, ktorý môžem rozdeliť na N častí, za akých podmienok ho môžem zapísať v tvare:

$$\rho_{AB\dots M} = \sum_{i=1}^k \rho_A^i \otimes \rho_B^i \otimes \dots \otimes \rho_M^i. \quad (3.61)$$

Intuitívne to znamená, že ľubovoľné dva podsystémy sú separovateľné, ale aj ľubovoľných k systémov medzi sebou je separovateľných. Logický postup by bol rozdeliť systém na dve časti a testovať existenciu previazania. Potom rozdeliť systém na iné dve časti a znova testovať, pričom by sme postupne vyčerpali všetky možné rozdelenia. Aj keby sme mali jednoduchý spôsob, ako previazanie detekovať (PPT už vo všeobecnosti fungovať nebude), nemuselo by

to stačiť. Existujú totiž stavy, ktoré nevykazujú dvojčasticové previazanie, nech rozdelíme systém akokoľvek a napriek tomu nie sú separabilné (mohli by sme ich pokladať za analóg situácie, keď máme klasický systém, ktorý vykazuje mnohočasticové korelácie, ale žiadne dva podsystémy korelované nie sú). Zatiaľ neexistuje žiadne rozumné a uznávané kritérium, ktoré by testovalo viacčasticové previazanie. Pokiaľ sa totiž nepodarí nájsť jasnú, jednoduchú a akceptovanú odpoveď na otázku, čo znamená, ak je stav viacčasticovo separabilný, nemá ani veľký zmysel pýtať sa, kedy sa tak stane.

3.6.4 Miery viacčasticového previazania

Ako vyplynulo z predchádzajúcej časti, nemá veľký zmysel zaujímať sa o miery viacčasticového previazania, kým nemáme ani len kritérium separability (pochopiteľne, každá dobrá miera je zároveň aj kritériom, stačí, ak testujeme, či je hodnota miery rovná nule alebo nie). Avšak aj pri viacerých časticách v systéme má dobrý zmysel zaujímať sa o to, akým spôsobom sú previazané jednotlivé dvojice v rámci tohoto systému, ak zvyšok nebudeme uvažovať.

V tom prípade môžeme použiť konkurenciu, ako jedínú rozumne použiteľnú mieru aj pre zmiešané stavy⁴. Ukazuje sa, že sa dajú nájsť niektoré zaujímavé vlastnosti, ktoré musia výsledky na jednotlivých dvojiciach spĺňať (štúdium týchto vlastností tvorí aj ďalšiu časť tejto práce). Najznámejšou je to, že celková konkurencia, ktorou sa jeden qubit viaže na zvyšok systému je istým spôsobom obmedzená. Teda nie je možné, aby bol jeden qubit maximálne silne previazaný s viacerými qubitmi v systéme.

Pre tri častice je v článku [28] je ukázané, že ak ich nazveme A, B a C, platí nerovnosť (nazvaná podľa autorov Coffman-Kundu-Wootters-ova, alebo jednoducho CKW nerovnosť):

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \leq C_{A(BC)}^2, \quad (3.62)$$

kde C_{AB} značí konkurenciu medzi časticami A a B. Pravá časť nerovnice zodpovedá konkurencii časti A k páru BC, ktorá bude definovaná neskôr. Rozvediem teraz ľavú stranu. Keďže vieme, že stav troch častíc je čistý a matica ρ_{AB} vznikla stopou z matice čistého stavu, matica $\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}$ (definíciu vid'. (3.41)) bude mať maximálne dve nenulové vlastné hodnoty. Potom

$$C_{AB}^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = Sp(\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}) - 2\lambda_1\lambda_2 \leq Sp(\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}) \quad (3.63)$$

a celá ľavá strana teda bude

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \leq Sp(\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}) + Sp(\rho_{AC}\tilde{\rho}_{AC}). \quad (3.64)$$

Pravá časť rovnice sa dá zjednodušiť na $4 \det(\rho_A)$. Vieme, že pre čistý stav sa dá konkurencia vyjadriť veľmi jednoducho, $C = 2\sqrt{\det(\rho_A)}$. Ak uvážime, že stav $|\psi\rangle_{ABC}$ je čistý a budeme pokladať pár BC za jeden objekt a nie za dve časti, môžeme definovať $C_{A(BC)}^2$ práve ako $4 \det(\rho_A)$, teda ako konkurenciu časti A k zvyšku systému.

Pokiaľ by stav ρ_{ABC} nebol čistý, môžeme definovať $C_{A(BC)}$ ako minimum cez všetky možné dekompozície matice ρ_{ABC}

$$C_{A(BC)}(\rho) = \min_{\rho=|\psi\rangle_{ABC}\langle\psi|} C_{A(BC)}(|\psi\rangle_{ABC}), \quad (3.65)$$

⁴Je dôležité pripomenúť, že ak by aj celý systém bol v čistom stave, ak sa zaujíname len o podsystém tvorený dvoma qubitmi, bude tento veľmi pravdepodobne v zmesi.

pričom nerovnosť (3.62) zostáva v platnosti.

Najpodstatnejšie ale je, že pravá strana nerovnice je vždy ohraničená číslom 1, pričom vo všeobecnosti ľavá strana až číslom 2. Nech je teda interpretácia veličiny $C_{A(BC)}$ akákoľvek, CKW nerovnosti nám dávajú závažnú informáciu o tom, že (minimálne) dvojčasticové korelácie sa nemôžu zdieľať v trojčasticovom systéme ľubovoľne.

Pre viacčasticový systém môžeme písať nerovnicu (3.62) v upravenom tvare

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 + \dots \leq 1, \quad (3.66)$$

kde na ľavej strane je súčet druhých mocnín konkurencií medzi prvým qubitom a všetkými ostatnými v systéme. Táto nerovnica (známa rovnako ako (3.62) pod skratkou CKW) nikdy nebola dokázaná, ale jej platnosť bola potvrdená vo všetkých testovaných prípadoch, vrátane rozsiahlych numerických testov aj na veľkých systémoch častíc. Dôležité je, že nezávisle na počte častíc v systéme, celková konkurencia je stále ohraničená číslom jedna. Interpretácia, že tým pádom môže byť jedna častica silnejšie viazaná iba s niekoľkými ďalšími časticami v systéme je z jednej strany správna, z druhej ale nie úplná. Keďže tu hovoríme len o dvojčasticovom previazaní, týka sa obmedzenie len jeho. Nepoznáme žiadne vhodné miery viacčasticového previazania a tak nemôžeme exaktne skúmať, či a prípadne ako sú aj tieto miery limitované vo veľkých systémoch. Rozumná interpretácia CKW nerovností by však mohla byť taká, že vo veľkých systémoch začínajú prevažovať mnohočasticové kvantové korelácie a na ďalšie narastanie tých dvojčasticových už jednoducho *nie je priestor*.

Rozsiahlejšia diskusia o zdieľaní dvojčasticových kvantových korelácií je v kapitole o previazaných grafoch.

Kapitola 4

Korelácie na kvantových systémoch

4.1 Korelácie dvoch qubitov

4.1.1 Čistý stav dvoch qubitov

Ak by sme vychádzali z definície klasickej korelácie z druhej kapitoly, mohlo by sa zdať, že hovoriť o korelácií na čistých stavoch nemá zmysel. Nie je to však, aspoň v kvantovej mechanike, celkom pravda.

Čistý stav je (povedané veľmi intuitívne) charakterizovaný tým, že o ňom máme maximálne množstvo informácie, ako je pre daný systém možné. Pre klasický systém je to napríklad výsledok každého možného merania na tomto systéme. Táto úplná znalosť vedie k tomu, že žiadne korelácie nie sú možné, pretože keď raz vieme všetko, žiadnu ďalšiu vedomosť už získať nemôžeme.

V kvantovej fyzike ani pre čistý stav nemôžeme poznať všetky možné výsledky meraní. Pre qubit, napríklad pre spin elektrónu, môžeme poznať výsledok merania spinu len v jednom smere. Meranie v akomkoľvek inom smere už bude vykazovať neurčitosť. Preto má zmysel, aby sme hovorili o korelácií dvoch qubitov aj v prípade, že sú v čistom stave.

Vzhľadom na to, že očakávame korelácie čisto kvantovej povahy (teda korelácie, ktoré sú spôsobené len neurčitostou danou nekomutujúcimi meraniami), stotožníme podmienku prítomnosti previazania a korelácie. Pár qubitov v čistom stave bude teda korelovaný, ak platí

$$|\psi\rangle_{12} \neq |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2. \quad (4.1)$$

Vo všeobecnosti však stavy jednotlivých qubitov vonkoncom nemusia byť čisté (jednoduchý príklad je, že pre maximálne previazaný stav dvoch qubitov $|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ je stav jednotlivých qubitov úplná zmes). Pravá strana rovnica preto nemusí byť dobre definovaná a je korektné rozšíriť ju na rovnicu pre matice hustoty, teda

$$\rho_{12} = |\psi\rangle_{12}\langle\psi| \neq \rho_1 \otimes \rho_2. \quad (4.2)$$

4.1.2 Zmes dvoch qubitov

V prípade zmesi už môžeme očakávať, že celková korelácia oboch qubitov bude spôsobená dvoma fenoménmi. Prvý je kvantová korelácia, previazanie, dôsledok toho, že pracujeme s

kvantovými časticami. Druhý je neurčitost' v našej znalosti systému, nemá nič spoločné s kvantovými vlastnosťami systému.

Z definície previazania vieme, že qubity sú kvantovo korelované, ak platí, že

$$\rho_{12} \neq \sum_i \sigma_1^i \otimes \sigma_2^i, \quad (4.3)$$

kde σ je všeobecný nenormovaný operátor hustoty. Zovšeobecnením rovnice (4.2) dostaneme, že qubity sú korelované, ak platí

$$\rho_{12} \neq \rho_1 \otimes \rho_2. \quad (4.4)$$

Táto definícia zodpovedá aj intuitívnej predstave o korelácii, ktorú by mali spĺňať dva qubity. A to, že budú korelované, ak existuje pár lokálnych meraní (jedno na prvom qubite a druhé na druhom), ktorých výsledky sú korelované. V konkrétnom prípade dvoch spinov elektrónu to zodpovedá existencii dvoch smerov, v ktorých meriame spiny jednotlivých elektrónov a výsledky nám vychádzajú korelované.

Porovnaním rovníc (4.3) a (4.4) okamžite vidíme, že dva previazané qubity sú aj korelované. V čistých stavoch sme mohli rozlišovať dve triedy stavov dvoch qubitov (vzhľadom na existenciu korelácií), a to úplne nezávislé (faktorizované) qubity a korelované, previazané qubity. V zmiešaných stavoch sa počet tried rozširuje na tri, existujú faktorizované stavy, korelované, ale nepreviazané stavy a korelované previazané stavy. Je zrejmé, že štvrtá trieda, ktorá by teoreticky mohla vzniknúť (previazané nekorelované stavy) je prázdna. Samotné previazanie totiž je forma korelácie a rovnica (4.3) je citlivá len na kvantovú formu previazania, kdežto rovnica (4.4) je citlivá na obidve formy.

4.1.3 Miery korelácie

Keďže test na koreláciu v systéme (4.4) zahŕňa kvantovú aj klasickú koreláciu, mohli by sme očakávať, že niektorá z mier klasickej korelácie bude vhodná aj pre kvantové systémy. Určite to však nemôže byť koeficient korelácie, pretože ten je explicitne definovaný pomocou výsledkov meraní. K všetkým jeho nedostatkom uvádzaným v kapitole o koreláciách na klasických systémoch by tak pribudla ďalšia, keď by sme museli pri každom počítaní hľadať maximum cez všetky možné dvojice meraní.

Jedinou rozumnou alternatívou zostáva teda index korelácie. Zopakujme jeho definíciu (2.7)

$$I = S_A + S_B - S_{AB}, \quad (4.5)$$

pričom však entropia pre kvantový systém bude definovaná odlišne od klasického

$$S = Sp(\rho \log \rho) \quad (4.6)$$

$$= \sum_i \lambda_i \log(\lambda_i) \quad (4.7)$$

$$\lambda_i = Ev(\rho), \quad (4.8)$$

kde symbol Sp označuje stopu matice (Spur) a Ev vlastné hodnoty daného operátora (Eigenvalues).

Pre čistý stav dvoch qubitov je entropia celého systému S_{AB} nulová a index korelácie sa redukuje na $I = S_A + S_B$. Platí tiež, že $S_A = S_B$ a z definície previazania formovania (3.39)

$I = 2E_f$. Na prvý pohľad je to veľmi zaujímavý výsledok, pretože nám dáva do súvisu celkovú koreláciu vyjadrenú korelačným koeficientom a previazanie, dané previazaním formovania.

Pri definícii korelačného koeficientu podľa (4.5) však narazíme na problém, že aj pre dva dvojhľadínové systémy môže nadobúdať hodnoty z intervalu $\langle 0, 2 \rangle$. Spôsobené je to tým, že kým v klasickom prípade platilo, že $S_A \leq S_{AB} \leq S_A + S_B$, v kvantovom platí len slabšia verzia nerovnosti $|S_A - S_B| \leq S_{AB} \leq S_A + S_B$ [29]. Je teda vhodné spätne nanormovať index korelácie na jedničku a upraviť definíciu (4.5) vloženíím jednej polovice.

Táto úprava vyrieši aj ďalší problém. Pre čistý stav očakávame, že celá korelácia bude spôsobená len previazaním, mali by sme teda mať takú mieru celkových korelácií, ktorá je ekvivalentná (pre čisté stavy) s mierou previazania. Pre definíciu

$$I_2 = \frac{S_A + S_B - S_{AB}}{2} \quad (4.9)$$

je táto podmienka splnená.

4.2 Viacčasticová korelácia

V prípade, ak máme v systéme aspoň tri qubity, situácia sa principiálne mení. Pre dva qubity sme mali totiž jednoznačne dané, že jediná korelácia o ktorej má zmysel hovoriť je dvojčasticová. Pre viac qubitov môžeme hovoriť o dvoj i viacčasticovej korelácií a o dvoj i viacčasticovom previazaní. Niektoré z týchto fenoménov nie sú celkom korektne definované a určite nie sú ani na sebe nezávislé. Preto je kompletná analýza situácie veľmi komplikovaná.

4.2.1 Rozpad viacčasticového previazania

Viacčasticové previazanie, podobne ako viacčasticová korelácia v klasickej fyzike, môže byť detekované len v prípade, ak pracujeme s celým systémom, na ktorom sa toto previazanie nachádza. Teda v prípade, ak máme v rozsiahlom systéme štyri qubity vzájomne previazané (čisto) štvorqubitovými kvantovými koreláciami, dokážeme tieto korelácie zistiť a využiť len v prípade, ak máme k dispozícii a pod kontrolou všetky štyri qubity. Podobne ako tomu bolo v prípade klasických korelácií.

Ak sme v klasickom prípade nemali k dispozícii všetky potrebné častice (systémy), nemohli sme koreláciu zistiť. Nevedeli sme systém rozoznať od nekorelovaného systému. V kvantovom prípade je to podobné, nedokážeme systém rozoznať od nepreviazaného systému. Na druhej strane, mnohočasticové previazanie sa vo všeobecnosti môže na podsystémoch prejavovať prostredníctvom klasických korelácií.

Zoberme príklad mnohočasticového GHZ stavu

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\dots 0\rangle + |11\dots 1\rangle) \quad (4.10)$$

a redukovaný operátor prvých dvoch qubitov

$$\rho_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Je zjavné, že hoci pôvodný stav celého systému bol čistý a očakávali sme na ňom len kvantovú koreláciu, stavy podsystémov sú zmiešané a vykazujú čisto klasickú koreláciu, dokonca najsilnejšiu možnú.

Vo všeobecnosti preto môžeme na N -časticovom systéme v čistom stave očakávať nie len všetky druhy previazania (od dvojčasticového po N -časticové), ale aj skoro všetky druhy klasickej korelácie (od dvojčasticovej po $(N - 1)$ -časticovú).

4.2.2 Čistý stav troch qubitov

Rozoberme pre začiatok ten najjednoduchší systém s viac ako dvoma časticami, čistý stav troch qubitov. Môžeme v ňom očakávať dvojčasticové korelácie (na troch možných pároch), dvojčasticové previazanie, trojčasticové previazanie, nie však trojčasticovú koreláciu. Navyše vieme, že klasická dvojčasticová korelácia by mala mať pôvod len v trojčasticovom previazaní, preto očakávame, že bude (v istom zmysle) symetrická vzhľadom na výmenu častíc (rovnaká na všetkých pároch).

Miera dvojčasticovej korelácie

Každá kandidátka na mieru korelácie viacčasticových systémov qubitov musí spĺňať niektoré požiadavky, napríklad

- Na čistých stavoch musí byť rovná (vhodne zvolenej) miere previazania
- Na faktorizovaných stavoch musí byť rovná nule
- Na (vhodne zvolených) maximálne korelovaných stavoch musí nadobúdať zvolenú maximálnu hodnotu (napríklad jednotku)
- Na všetkých ostatných stavoch musí nadobúdať hodnoty medzi nulou a jednotkou (prípadne inak zvolenou maximálnou hodnotou), vždy však hodnotu väčšiu alebo rovnú ako zvolená miera previazania

Na začiatok sa sústredíme len na mieru dvojčasticovej korelácie, ktorú je možné porovnávať s previazaním formovania. Nami navrhovaná miera korelácie (4.9) spĺňa prvé tri podmienky. Zostáva ešte overiť štvrtú, teda hlavne to, či náhodou neklesá pre niektoré stavy pod mieru previazania. Zoberme konkrétny príklad, W stav troch qubitov

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \quad (4.12)$$

Redukovaný operátor ľubovoľných dvoch častíc má tvar

$$\rho_{12} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Pokúsime sa najskôr spočítať mieru previazania. Samotné previazanie formovania je definovaný komplikovane pomocou maximalizácie, vieme však vypočítať konkurenciu. Táto je definovaná vzorcom (3.43) a pre operátor (4.13) nadobúda hodnotu

$$C = \frac{2}{3}. \quad (4.14)$$

Pomocou vzorcov (3.44,3.45) konkurenciu dokážeme prepočítať na previazanie formovania a dostávame

$$E_f \simeq 0.55 \quad (4.15)$$

Na výpočet upraveného indexu korelácie potrebujeme poznať entropiu jednotlivých qubitov, ako aj entropiu podsystemu dvoch qubitov. Keďže však je celý systém (dva qubity plus jeden zvyšný tvoria celý systém, čo stavia prípad troch častíc do veľmi špecifickej situácie oproti viacčasticovým prípadom) v čistom stave, vieme, že tieto entropie budú rovnaké. Definícia indexu korelácie sa teda redukuje na

$$I_2 = \frac{S_A}{2} = \frac{S_{AB}}{2}. \quad (4.16)$$

Okamžite je zrejmé, že nastal problém. Hodnota indexu je totiž obmedzená hodnotou $\frac{1}{2}$ (entropia jedného qubitov je vždy obmedzená jednotkou), a to je zjavne menej ako vypočítaná hodnota previazania formovania. Pre presný výpočet potrebujeme vlastné hodnoty matice (4.13). Tie sú $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$, z nich vypočítaná entropia je približne 0.92 a index korelácie

$$I_2 \simeq 0.46 \quad (4.17)$$

Ani upravený index korelácie preto nemôže slúžiť ako vhodná miera pre celkové korelácie v systéme.

Miera viacčasticovej korelácie

Miera viacčasticového previazania je známa len pre veľmi špecifický prípad čistého stavu troch qubitov [28]. Dôvod je už raz spomenutá vlastnosť, že entropia systému dvoch qubitov je rovnaká ako entropia zvyšného tretieho (keďže celok je čistý stav). Táto vlastnosť umožňuje odhaliť trojčasticové previazanie porovnaním miery zmesovosti (entropie) prvého qubitov s mierou jeho previazania so zvyšnými dvoma. V citovanom článku je toto porovnanie robené s pomocou miery *tangle*, ktorá vznikne obyčajným umocnením konkurencie na druhú. Miera zmesovosti je vyjadrená pomocou determinantu matice samostatného qubitov.

Mohli by sme navrhovať miery trojčasticovej korelácie, ktoré by na čistých stavoch spĺňali podmienku rovnosti s takto definovanou mierou trojčasticového previazania. Nemalo by to však veľký zmysel, keďže by sme nedokázali overiť platnosť nerovnosti (klasické korelácie sú vždy väčšie ako previazanie) na zmiešaných stavoch troch častíc, kde miera previazania nie je dobre definovaná.

Kapitola 5

Odhady v kvantovej mechanike

5.1 Úvod

Kvantová mechanika je vo svojej podstate štatistická teória. To znamená, že jej predpovede sú presné len pre veľké množstvá opakujúcich sa situácií. Typickým príkladom je stav **jedného qubitu** bežne označovaný ako

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (5.1)$$

kde α a β sú komplexné čísla. Až na globálnu fázu sa tento stav dá reprezentovať pomocou dvoch sférických súradníc

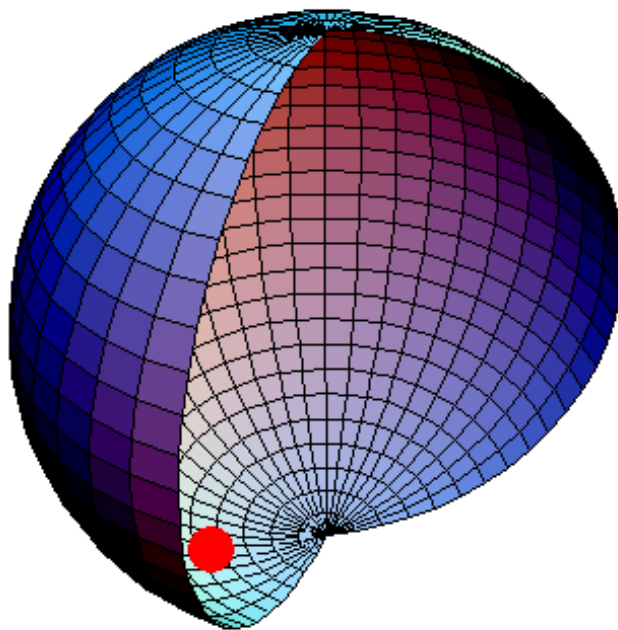
$$|\psi\rangle = \sin(\vartheta) |0\rangle + e^{i\varphi} \cos(\vartheta) |1\rangle \quad (5.2)$$

a znázorniť jednotkovým vektorom smerujúcim na povrch gule, tzv. Blochovej sféry. Ako vyplýva z kodanskej interpretácie, parametre stavu (5.2) vyjadrujú pravdepodobnosti výsledkov meraní spinu v rôznych smeroch. Na druhej strane je však zrejmé, že pokiaľ hovoríme o pravdepodobnosti, musíme hovoriť o štatistických súboroch a nie o jednotlivých exemplároch. Preto vyššie uvedený stav v skutočnosti reprezentuje (pokiaľ požadujeme absolútnu presnosť, resp. spoľahlivosť výsledkov) **nekonečný súbor** rovnako pripravených fyzikálnych systémov so spinom $\frac{1}{2}$.

Je bežnou a nezvratiteľnou vlastnosťou všetkých experimentov, že ich výsledkami vždy boli a budú len **konečné objemy dát**, navyiac zatažené najrôznejšími chybami. Je úlohou fyzikov na základe týchto dát potom dedukovať vlastnosti meraných systémov a pripisovať im jednotlivé parametre. Vždy tak ale môžeme urobiť len s istou presnosťou, spoľahlivosťou. Preto každé priradenie parametrov α a β jednoqubitovému systému je vo svojej podstate odhadom, lepším alebo horším.

Všetky tieto skutočnosti však platia rovnako dobre aj pre klasickú fyziku. Kvantová fyzika však v sebe skrýva ďalšie problémy pri priradovaní jednotlivých vlastností na základe existujúcich dát. Tie vyplývajú z nekomutovania niektorých meraní¹, typicky jednotlivých zložiek spinu. Môže sa tak stať, že napriek tomu, že máme "dostatočný" počet meraní danej veličiny (napr. spinu), nevieme spoľahlivo určiť jej hodnotu. dôvodom je, že merania neobsiahli dostatočne (prípadne vôbec) celý priestor. Ak určíme veľkým počtom meraní zložku spinu v smere osi z , stále ešte potrebujeme spôsob, ako odhadnúť ostatné dve zložky. V tomto odhade

¹Pod týmto pojmom rozumiem fakt, že pri meraní niektorých vlastností je výsledok ovplyvnený faktom, v akom poradí za sebou sa merania uskutočnili aj vtedy, ak ich vykonáme časovo veľmi tesne za sebou.



Obrázok 5.1: Na obrázku je znázornená Blochova sféra, povrch jednotkovej gule. Pre názornosť je časť povrchu transparentná, aby bolo možné nahliadnuť aj dovnútra, do priestoru zmičšaných stavov. Červený bod znázorňuje vybraný čistý stav.

musíme zvážiť, či sa jedná o čistý alebo zmiešaný stav, prípadne ďalšie naše a-priori vedomosti a na základe toho rozhodnúť.

V tejto kapitole sa budem venovať existujúcim spôsobom odhadu jedno- a viac-qubitových stavov, ako aj najvšeobecnejších operácií pôsobiacich na jeden qubit. Prítom posúdim dva základné prípady. V prvom uvažím úplne pokrytie, avšak len konečným (nedostatočným) počtom dát. V druhom budem uvažovať, že máme k dispozícii dostatočnú (nekonečnú) štatistiku meraní, ale nemáme pokryté všetky zložky.

5.2 Maximum likelihood method

5.2.1 Popis metódy

Táto metóda, voľne preložená ako metóda maximálnej pravdepodobnosti, je vo svojej podstate veľmi jednoduchá a univerzálna. Vynašiel ju v dvadsiatych rokoch minulého storočia R. Fisher [30] a pracuje priamo s dátami - výsledkami experimentu a jej výsledkom je stav skúmaného systému, ktorý s najväčšou pravdepodobnosťou zodpovedá nameraným dátam. Jej využitie je podstatne širšie ako len na oblasť fyziky či klasickej vedy. Už z podstaty metódy vyplýva, že s jedná o numerický proces a to je aj jeho hlavnou nevýhodou: vo všeobecnosti je veľmi ťažké v reálnom čase nájsť výsledok a ešte oveľa náročnejšie je určiť mieru spoľahlivosti tohoto výsledku.

Základným vstupom do metódy je očakávaný výsledok s vhodne zvolenými voľnými para-

metrami. V prípade qubitu je to napríklad čistý stav v tvare (5.2).

Označme tento najvšeobecnejší výsledok (v ktorom sme už prípadne implementovali pôvodné a-priori vedomosti) ako

$$\Omega(\alpha_i), \quad (5.3)$$

kde α_i sú voľné parametre. Označme ďalej každý výsledok jednotlivého (a -teho) merania ako

$$V_a \quad (5.4)$$

a reprezentujme ho (vo všeobecnosti) ako vektor reálnych čísel. Nech je pravdepodobnosť namerania tohoto výsledku (v závislosti na parametroch α_i) daná vzťahom

$$P[\Omega(\alpha_i), V_a]. \quad (5.5)$$

Zavedme funkciu celkovej pravdepodobnosti získania nameranej sady dát

$$F = \prod_a P[\Omega(\alpha_i), V_a]. \quad (5.6)$$

Jej hodnota je závislá ako na nameraných dátach, tak na odhadovanom stave a je funkciou vstupných parametrov α .

Úlohou je špecifikovať vhodné parametre α , resp. nájsť pre nich vhodné podmienky, ktoré ich podľa možnosti jednoznačne určia. Celá myšlienka metódy spočíva v tom, že vyberá také parametre, pre ktoré sa maximalizuje pravdepodobnosť získať namerané dáta. Inak povedané, najlepším odhadom je taký stav (5.3), ktorý s najväčšou pravdepodobnosťou zreprodukuje už namerané dáta:

$$\max_{\alpha} F. \quad (5.7)$$

Z numerického hľadiska však problém nie je zďaleka tak jednoducho realizovateľný. Funkcia (5.6) obsahuje vysoké mocniny vstupných parametrov, preto je často vhodné použiť namiesto nej $\log(F)$, kde sa násobenie zmení na sčítavanie položiek. Pri akýchkoľvek komplikovanejších systémoch však exponenciálne rastie počet parametrov stavu, rovnako tak musí rásť počet nameraných hodnôt (aby získané odhadu mali použiteľnú výpovednú hodnotu). Maximalizácia sa tak komplikuje z dvoch strán naraz, jednak hľadáme extrém cez veľké množstvo parametrov a tiež sa nám komplikuje samotná funkcia. Praktickým riešením tak často býva zakomonovanie mnohých (nie vždy plne podložených) predpokladov o výsledku (rôzne symetrie a podobne), ktoré uľahčujú hľadanie, avšak skrývajú v sebe potenciálne nebezpečenstvo.

Čím menej máme vstupných dát a čím viac predpokladov na výsledok sme položili, tým je väčšia šanca, že odhad výsledku bude katastrofálne zlý. Funkcia pravdepodobnosti by totiž nadobudla svoje minimum v tej oblasti priestoru, ktorý sme parametricky nepovolili. Môže sa stať, že jej hodnoty v povolenom okolí už budú menšie ako hodnoty v úplne inej časti povoleného priestoru, a tak aj pri korektnej maximalizácii nemusí výsledok vôbec zodpovedať realite.

Ďalšími možnými problémami sú nemožnosť vhodne parametrizovať výsledok (napr. len za pomoci ďalších zložitých podmienok na parametre α , ktoré výrazne spomalí proces maximalizácie) a tiež nemožnosť priamo overiť spoľahlivosť výsledku. Bližšie informácie o tejto metóde, rovnako ako o jej použití priamo v kvantovej mechanike sa dajú nájsť v knihe [35].

5.2.2 Odhad zmiešaného stavu jedného qubitu

Uvediem tu jeden jednoduchý príklad, ako sa dá vyššie spomínaná metóda použiť na odhad stavu qubitu. Vhodná parametrizácia stavu je

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

s okrajovou podmienkou $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Merania budem prevádzať v troch rôznych smeroch daných osami x , y a z a výsledky meraní budú nadobúdať hodnoty ± 1 podľa toho, či je výsledný spin v smere alebo proti smeru danej osi. Nech sme urobili 100 meraní v každom smere priemerné hodnoty nám vyšli nasledovne:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 0.81 \\ \bar{y} &= 0.63 \\ \bar{z} &= -0.79. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Jednoduchým postupom (bez použitia ML metódy) by bolo dosadenie týchto výsledkov priamo do stavu (5.8), avšak výsledný stav by nespĺňal okrajovú podmienku, keďže norma vektora (5.9) je 1.3. Tento fakt mohol mať mnoho príčin, od príliš malej štatistiky cez chyby pri experimente a meraní až po nesprávnu interpretáciu výsledkov. Ak však použijeme metódu Maximum Likelihood, dokážeme nájsť fyzikálny stav, ktorý je v zmysle pravdepodobnosti najbližší nameraným dátam. Takýto stav je charakterizovaný parametrami

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 0.625 \\ \bar{y} &= 0.486 \\ \bar{z} &= -0.610 \end{aligned} \quad (5.10)$$

a je to čistý stav.

5.3 Odhad spinu podľa jeho priemetov

Ako bolo spomenuté v úvode, ďalšou možnou otázkou pri odhadovaní kvantovomechanických systémov je odhad spinu, ak nemáme k dispozícii všetky jeho zložky, resp. priemety do dostatočného počtu osí. Tento problém je čisto kvantovomechanický a nesúvisí priamo s potrebou štatistického prístupu.

Rovnako ako v prípade ML metódy, aj tu bola snaha definovať podľa možnosti čo naj-všeobecnejší spôsob, ako prechádzať od nameraných výsledkov k odhadom stavu. Základná myšlienka, ktorá sa aplikuje v tomto prípade, je *nepriusudzovať systému žiadnu vlastnosť, ktorá by nevyplývala z nameraných výsledkov*. Inak povedané, ak nám namerané dáta povoľujú vybrať ako kandidátov viaceré výsledky, konečnou voľbou bude ten výsledok, ktorý v sebe obsahuje najmenej informácie o stave. Toto sa dá doceliť požiadavkou na maximálnu entropiu výsledku[31], čo je matematicky zapísateľná a často aj analyticky riešiteľná záležitosť.

Druhou možnou úvahou je *byť spravodlivý k všetkým možným výsledkom*. Inak povedané, zo všeobecnej parametrizácie výsledkov vyberieme tie, ktoré zodpovedajú našim nameraným dátam. Keďže neexistuje spôsob, ako vybrať jeden výsledok z tejto podmnožiny alebo ako označiť niektoré z nich za lepšie alebo horšie, jediný rozumný postup je zobrať za konečný

výsledok neváhaný priemer všetkých možných výsledkov. Toto je pochopiteľne možné len v prípade, že na priestore výsledkov máme vhodnú mieru (ako je tomu na priestore stavov). V ďalšom texte ukážem, že na priestore operácií takáto kánonická miera neexistuje a postup tam nie je dobre použiteľný.

Predstavme si teda situáciu, že máme k dispozícii zmiešaný stav qubitu. Naše zariadenie dokáže zmerať spin v smere osi z a x , nie však už v smere y . Všeobecnú maticu hustoty nášho stavu bude predstavovať matica 2×2 v tvare (5.8), pričom máme z výsledkov experimentu zadefinované parametre x a z . Zostáva teraz odhadnúť, resp. určiť neznámu hodnotu parametra y . Ak použijeme druhý postup, prepracujeme sa úvahou k výsledku veľmi rýchlo.

Fyzikálne prípustné sú všetky stavy, pre ktoré platí:

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + z^2}. \quad (5.11)$$

Ku každej možnej hodnote y teda zákonite prislúcha aj možná hodnota $-y$ a priemer týchto dvoch stavov definuje výsledok $y = 0$. Keďže všetky možné výsledky sa vyskytujú len v takýchto pároch, aj konečný výsledok musí spĺňať podmienku

$$y = 0. \quad (5.12)$$

Pre úplnosť však použijeme na výpočet aj prvý postup. Entropia stavu je definovaná v kapitole 3 ako

$$-Sp(\rho \log \rho) \quad (5.13)$$

a jej derivácia podľa neznámej y má hodnotu

$$\frac{i}{2} \left(\frac{x - iy}{(x + iy)^2} - \frac{x + iy}{(x - iy)^2} \right). \quad (5.14)$$

Korene tejto rovnice sú tri, ale len jeden pre $y = 0$ je maximom.

5.4 Kvantové operácie

5.4.1 Definície

Kvantové operácie patria k základným zložkám kvantovej teórie spolu so stavmi a meracími prístrojmi. Môžeme si ich predstaviť ako čierne skrinky, ktoré spracovávajú kvantové stavy. Keďže ich problematike (na rozdiel od stavov) som sa v tejto práci zatiaľ nevenoval, zadefinujem tu niektoré základné vlastnosti, parametrizáciu a podobne.

Kvantová operácia, niekedy tiež nazývaná kvantový kanál, je fyzikálny objekt zobrazujúci stav kvantovomechanického systému na iný (prípadne rovnaký) stav v tom istom priestore[40]:

$$\varepsilon(\rho_{in}) = \rho_{out}, \quad \rho_{in}, \rho_{out} \in H, \quad (5.15)$$

kde ε je operácia a H je Hilbertov priestor príslušných stavov, nad ktorým pracujeme. Každá fyzikálna kvantová operácia musí spĺňať niekoľko podmienok:

- Musí byť deterministická, teda z každého vstupu musí vygenerovať práve jeden výstup
- Musí byť lineárna, zachovávať princíp superpozície $\varepsilon(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2) = \alpha\varepsilon(\rho_1) + \beta\varepsilon(\rho_2)$

- Musí byť pozitívna, zobrazovať každý fyzikálny stav na fyzikálny stav
- Musí byť úplne pozitívna (tzv. CP podmienka), jej rozšírenie identickou operáciou na ľubovoľný väčší Hilbertov priestor musí byť pozitívne a musí zachovávať jednotkovú stopu výsledného stavu.

K týmto nutným podmienkam za často pridáva ešte ďalšia, ktorá vyžaduje, aby operácia nemala pamäť, teda jej akcia na stave nebola závislá na tom, aké stavy spracovávala v minulosti. Aj operácia s pamäťou sa však dá v každom jednom kroku pokladať za obyčajnú kvantovú operáciu s tým, že sama zmení svoj stav následkom vlastnej akcie.

Matematicky sa dá takáto operácia na jednom qubite zdefinovať ako afinná transformácia. Stav qubitu zapíšeme (s parametrami z (5.8)) vo forme vektora

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

pričom jednotka v prvom riadku zabezpečuje jednotkovú normu vektora. Operáciu ε potom môžeme zapísať vo forme

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

a jej akciu

$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon \cdot \rho. \quad (5.18)$$

Zavedme ešte označenie

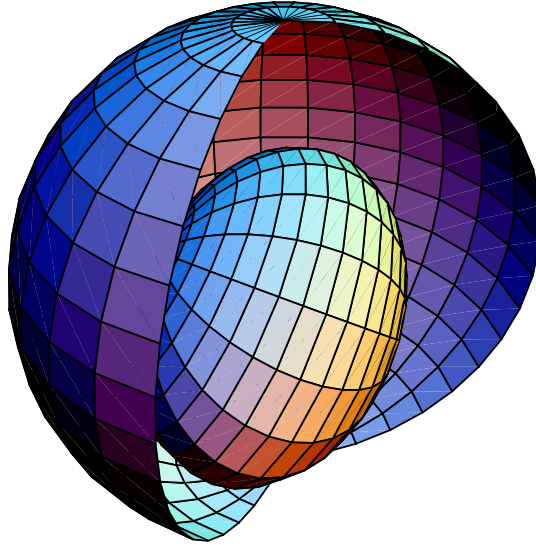
$$V_i = (a_i, b_i, c_i). \quad (5.19)$$

Ako je vidieť, do hry vstupuje až dvanásť parametrov, pričom sú viazané vysoko netriviálnymi podmienkami. Prvé dve z vyššie uvedených, rovnako ako požiadavka na konštantnosť operácie, sú splnené automaticky. Pozitvita (resp. podmienky na jej splnenie) sa ozremia, ak si uvedomíme, ktoré parametre akým spôsobom transformujú vstupné stavy.

Prvý riadok matice zabezpečuje zachovanie jednotkovej normy výstupného stavu. Netriviálna je preto len obdĺžniková matica 4×3 , ktorá v sebe obsahuje všetky potrebné údaje. Prvý stĺpec matice (vektor s indexom nula) reprezentuje posun úplnej zmesi $\rho = \frac{1}{2}I$ (operácie, ktoré majú vektor $V_0 = \vec{0}$, nazývame **unitálne operácie**). Ostatné tri vektory reprezentujú transformáciu jednotlivých priemetov spinu a ich tri parametre sa dajú (po prepise do sférických súradníc) interpretovať ako zmena dĺžky príslušného priemetu a jeho všeobecná rotácia.

Ako je spomenuté vyššie, pozitvita operácie sa dá interpretovať ako požiadavka, aby fyzikálne stavy zobrazovala na fyzikálne stavy. Pri geometrickom pohľade požadujeme, aby Blochova sféra vstupných stavov bola transformovaná na objekt, ktorý sa nachádza vo všeobecnosti vo vnútri tejto sféry (príklad je uvedený na obrázku (5.2)). Tu sa ukazuje výhoda použitej parametrizácie, lebo jednoducho geometricky odhalíme požiadavky pre parametre matice. Prvou je, že posun úplnej zmesi musí byť vrámci Blochovej sféry, teda

$$|V_0| \leq 1. \quad (5.20)$$



Obrázok 5.2: Veľká guľa zobrazuje priestor všetkých možných vstupných stavov (Blochovu sféru). Menší elipsoid vnútri podmnožinu stavov, ktoré su oborom hodnôt pozitívnej operácie. Podmienkou pozitivity je, že výsledný obor nepresahuje okraje Blochovej sféry.

Podobne žiaden čistý stav² nemôže prekročiť hranicu Blochovej sféry, preto musí platiť

$$\forall P = (k, l, m), |P| = 1 \quad |V_0 + kV_1 + lV_2 + mV_3| \leq 1. \quad (5.21)$$

Za istých okolností je vhodným postupom na overenie pozitivity tiež spočítanie vlastných hodnôt výstupnej matice hustoty pre všeobecný vstupný stav a overenie, či sú všetky kladné.

Posledná požiadavka na operáciu, úplná pozitivita, je zároveň najkomplikovanejšia a najhoršie overiteľná. Teoreticky by totiž bolo potrebné vyrobiť všetky možné rozšírenia operácie do väčších Hilbertových priestorov a overovať ich pozitivitu (čo by nebolo rovnako jednoduché ako v prípade, keď je skúmaný len priestor jedného qubitu). Pre operáciu pôsobiacu na jeden qubit však stačí urobiť rozšírenie identitou na dvojnásobne veľký Hilbertov priestor (teda na operácie na dvoch qubitoch) a otestovať pôsobenie operácie na maximálne previazaný stav. Ak je výstupný stav v poriadku (jeho matica hustoty má nezáporné vlastné hodnoty), testovaná operácia spĺňa podmienku úplnej pozitivity. Musí teda platiť pre

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle),$$

$$\Omega = I \otimes \varepsilon,$$

že vlastné hodnoty výsledku $\Omega(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ sú nezáporné. Tento fakt budem v ďalšej práci intenzívne využívať.

5.4.2 Priama rekonštrukcia

Vrátme sa teraz ale k pôvodnej téme tejto kapitoly, a tou sú odhady vlastností na základe experimentálnych dát. Otázka znie: Koľko a akých dát potrebujeme na to, aby sme s veľkou

²Z dôvodu linearity budú tvoriť okraje výstupného oboru operácie stavy, ktoré vznikli z čistých stavov na vstupe.

spoľahlivosťou mohli niečo vysloviť o jednoqubitovej operácii? Túto operáciu si môžeme predstaviť ako čiernu skrinku, ktorá spracováva vstupné stavy. Našou úlohou je zistiť alebo čo najlepšie odhadnúť, aké sú parametre tejto skrinky. Odpoveď je o niečo zložitejšia ako v prípade stavov, nakoľko pri rekonštruovaní operácii vždy pracujem len s nepriamymi dátami.

Inak povedané, výsledky môjho experimentu sú vždy výsledky o stavoch (vstupných a výstupných), nie o operáciách. Preto na úspešné zisťovanie parametrov rekonštrukcie musíme zistiť potrebné dáta o stavoch, ktoré do operácie vchádzajú a tiež o stavoch, ktoré z nej vychádzajú. Až **korelácie** medzi týmito dátami majú výpovednú hodnotu o samotnej operácii³. Keďže však z praktického hľadiska je rozumné predpokladať plnú znalosť o vstupujúcich stavoch (v experimentoch máme často lepšiu kontrolu pri príprave vstupných stavov ako pri realizácii operácií), sústredíme sa na problém zisťovania parametrov operácie z výstupných stavov za predpokladu úplnej znalosti o stavoch vstupných. Budeme tiež predpokladať, že na vstupe vieme produkovať vždy dostatočné množstvo stavov jedného typu (pri obmedzených množstvách dát by sa použila ML metóda).

Otázku z úvodu sekcie preto môžeme spresniť: Koľko rôznych stavov musíme postupne transformovať pomocou neznámej operácie a na jej konci merať výsledok, aby sme o nej získali úplnú informáciu? Dobrý odhad (a ako sa ukáže, dokonca aj presný výsledok) môžeme dostať z úvahy o počte parametrov.

O každom výstupnom stave môžeme v zásade zistiť tri reálne parametre (ak uvážime, že nemusí byť čistý) - tri priemety spinu na rôzne osi. Ako je zrejmé z rovnice (5.17), operácia je charakterizovaná dvanástimi parametrami, preto sa dá očakávať, že na vstupe budeme potrebovať minimálne štyri druhy stavov. Keďže uvažujeme s lineárnymi operáciami, lineárne závislé vstupy nám neprinesú žiaden ďalší efekt, preto môžeme podmienku rozšíriť na štyri druhy lineárne nezávislých stavov⁴.

Na druhej strane je jednoduché sa presvedčiť, že vhodne zvolené štyri stavy plne postačujú. Ak zoberieme na vstupe ako prvý stav úplnú zmes, na výstupe dostaneme stav charakterizovaný vektorom V_0 . Ak potom postupne za vstup zvolíme čisté stavy so spinom v smere osí x, y a z , dostaneme ako výsledky súčty vektorov $V_1 + V_0, V_2 + V_0$ a $V_3 + V_0$. Z toho sa dajú už triviálne získať všetky potrebné parametre. Navyše je zrejmé, že ak máme na vstupe štyri lineárne nezávislé stavy, môžeme z nich lineárnou kombináciou vybrať práve štyri vyššie uvedené.

Týmto postupom rekonštrukcie sme dosiahli splnenie všetkých podmienok kladených na kvantovú operáciu okrem jedinej - nie je zaručené, že takto získaná operácia bude úplne pozitívna. Príčiny môžu byť rôzne (rovnako ako pri problémoch s rekonštrukciami stavov) a možnými riešeniami sa budem zaoberať v ďalšej časti práce.

³Predstavme si, že by sme mali k dispozícii len merania zo stavov z výstupu kvantovej operácie. Mohli by sme síce v najlepšom prípade určiť (aj to len vtedy, ak by sme vedeli priradiť, ktoré výsledky patria rovnakým vstupným stavom) výsledný obor operácie, avšak žiadne ďalšie informácie by sme o nej nevedeli získať.

⁴Na prvý pohľad sa zdá nejasné, akým spôsobom je možné získať až štyri lineárne nezávislé stavy v priestore jedného qubitu, ak sú navyše všetky tieto stavy charakterizované len tromi reálnymi parametrami. Dobrú ilustráciu poskytne parametrizácia zavedená v (5.16), kde môžem zvoliť tri lineárne nezávislé stavy charakterizované parametrami x, y a z . Tieto tri stavy však nepokryjú celý priestor, lebo ich všeobecná kombinácia nebude normovaná na jednotku. Ako štvrtý stav preto môžeme (napríklad) zvoliť stav úplnej zmesi ($x = y = z = 0$).

Pochopiteľne, tieto štyri lineárne stavy sa nedajú vybrať tak, aby boli navzájom kolmé, to však ani nie je vo všeobecnosti potrebné.

5.4.3 Rekonštrukcia pomocou previazaných stavov

Úplne iný prístup k rekonštrukcii kvantovej operácie umožňuje využitie previazaných stavov. Len jediný stav dvoch qubitov obsahuje až 15 voľných parametrov, čo je viac ako dost' na to, aby sme určili všetky potrebné parametre operácie. A ako je ukázané v článkoch [35, 36, 37, 38], aj samotný postup je relatívne jednoduchý.

Ak máme k dispozícii neznámu kvantovú operáciu, rozšírime ju na priestor dvoch qubitov o identitu. To značí, že nová, dvojqubitová operácia bude na jednom qubite vykonávať pôvodnú operáciu a na druhom nechá stav bez zmeny. Pripravený dvojjasticový previazaný stav (teoreticky schéma funguje pre ľubovoľný previazaný stav, ale najväčšiu presnosť dosahuje na maximálne previazaných čistých stavoch) potom bude obsahovať všetky informácie potrebné na rekonštrukciu jednoqubitovej operácie. Stačí úspešne rekonštruovať tento dvojjasticový stav (čo však, z experimentálneho hľadiska, môže byť podstatne väčší problém ako odhadnúť aj veľké množstvo jednojjasticových stavov, nakoľko tie nevyžadujú vykonávať merania naraz na dvoch qubitoch).

Ukážme teraz presný postup, ako z odhadnutého dvojjasticového stavu získame parametre operácie. Zoberme vstupný, maximálne previazaný stav, ktorý má v σ -báze tvar:

$$P_+ = \frac{1}{4}(1 \otimes 1 + \sigma_x \otimes \sigma_x - \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z).$$

Výstupný stav dvoch qubitov, ktorý je výsledkom pôsobenia rozšírenej operácie označme

$$\Omega = \mathcal{E} \otimes \mathcal{I}[P_+]. \quad (5.22)$$

Tento výstupný stav sa dá jednoznačne zapísať (znova použijeme rozklad do σ -bázy):

$$\Omega = \frac{1}{4}(\Omega_0 \otimes 1 + \Omega_x \otimes \sigma_x + \Omega_y \otimes \sigma_y + \Omega_z \otimes \sigma_z),$$

kde

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \mathcal{E}[1] = \frac{1}{2}(1 + \vec{V}_0 \cdot \vec{\sigma}); \\ \Omega_x &= \mathcal{E}[\sigma_x] = \frac{1}{2}\vec{V}_1 \cdot \vec{\sigma}; \\ \Omega_y &= -\mathcal{E}[\sigma_y] = -\frac{1}{2}\vec{V}_2 \cdot \vec{\sigma}; \\ \Omega_z &= \mathcal{E}[\sigma_z] = \frac{1}{2}\vec{V}_3 \cdot \vec{\sigma}. \end{aligned}$$

Odhad výstupného stavu Ω nám preto dá presnú informáciu o operácii.

Ukážme teraz ešte, že na vyššie uvedený postup nie je nutné použiť maximálne previazaný stav. Keďže každý dvojqubitový stav sa dá zapísať vo forme

$$\varrho = \frac{1}{4}(1 \otimes 1 + x\sigma_x \otimes \sigma_x + y\sigma_y \otimes \sigma_y + z\sigma_z \otimes \sigma_z),$$

výsledok po operácii bude

$$\Omega = \frac{1}{4}(\mathcal{E}[1] \otimes 1 + x\mathcal{E}[\sigma_x] \otimes \sigma_x + y\mathcal{E}[\sigma_y] \otimes \sigma_y + z\mathcal{E}[\sigma_z] \otimes \sigma_z).$$

Jediné, čo potrebujeme zaručiť pre úspešnú rekonštrukciu je, aby žiaden z koeficientov x, y a z nebol nulový. A to platí práve v prípade (pre čisté vstupné stavy, ktorými sa zaoberáme), ak je vstupný stav previazaný.

Kapitola 6

Previazané grafy

V tejto kapitole sa budem venovať problému zdieľania dvojčasticového previazania v mnohočasticových dvojhladinových systémoch - qubitoch. Z dôvodov popisovaných v predchádzajúcich kapitolách sa obmedzím len na skúmanie dvojčasticových operátorov jednotlivých dvojíc qubitov, ktoré vznikli po vylúčení zvyšku systému. Budem pracovať len s previazaním, nateraz ma teda nebudú zaujímať klasické korelácie a ani problémy spojené s mierami. Vzhľadom na komplikovanosť celého problému ho budem skúmať z dvoch pohľadov. V prvom sa obmedzím na skúmanie toho, či je istá dvojica kvantových bitov previazaná alebo nie, pričom sa nebudem zaujímať o silu (mieru) ich previazania. V druhom, zložitejšom prípade (ktorý bude v ďalšom texte referovaný ako *Váňované grafy*) sa vstúpi do problému aj miera previazania - konkurencia ako vstupný parameter pre každú dvojicu qubitov.

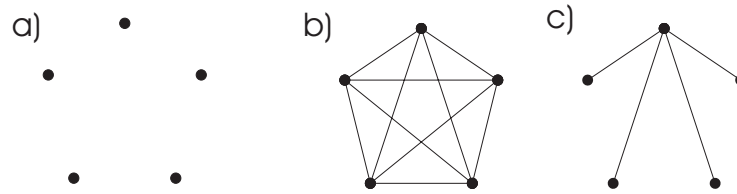
Hlavným problémom, ktorý budem riešiť je otázka, či je možné "na zákazku" zostrojiť stav, ktorý ma definované vlastnosti previazania. Je známe, že každý fyzikálny stav systému je možné (teoreticky, v limite veľkého počtu stavov) pripraviť, preto stačí skúmať, či stav teoreticky existuje. Pokiaľ sa nezaujímam o samotnú silu previazania, redukuje sa otázka na to, či môžem fyzikálne zostrojiť stav (čistý alebo zmiešaný), ktorý má jednotlivé dvojice qubitov (podľa predchádzajúceho želania) previazané alebo separabilné. V tomto prípade je grafov vždy konečný počet (aj keď tento rastie exponenciálne rýchlo s počtom qubitov; presný počet rôznych grafov, ktoré nie sú vzájomne zviazané nejakou symetriou, je veľmi ťažké všeobecne určiť), preto je možné v princípe rozdeliť všetky možné grafy do množiny fyzikálne prípustných a neprípustných.

Ak však uvažujeme previazané grafy, pre N qubitov budú určené vždy $\frac{N(N-1)}{2}$ reálnymi parametrami ohraničenými nulou a jednotkou (konkurencie, resp. ľubovoľné iné miery previazania každej dvojice qubitov). Stanoviť všeobecné hranice pre všetky vstupné parametre je veľmi zložitá úloha, dokážem však určiť postačujúcu podmienku pre sadu parametrov, ktorá zaručí existenciu požadovaného stavu.

6.1 Definícia

Každý fyzikálny stav N qubitov budem reprezentovať pomocou grafu so zachovaním nasledujúcich pravidiel

- Stav systému s N qubitmi zodpovedá graf s N vrcholmi



Obrázok 6.1: Previazané grafy pre systém piatich qubitov. a) zodpovedá úplne separabilnému stavu alebo stavu bez dvojčasticového previazania (GHZ stavy), b) zodpovedá stavu s dvojčasticovým previazaním na všetkých dvojiciach a c) takzvanému hviezdicovému grafu, s previazaním len medzi prvým a ostatnými qubitmi

- Jednotlivé vrcholy grafu môžu byť spojené hranami jedného druhu, ktoré sú neorientované a neváhované
- Vrcholy zodpovedajúce qubitom i a j sú spojené hranou vtedy a len vtedy, ak sú previazané, teda ak ich redukovaný operátor nie je separabilný
- Celkový počet hrán v grafe (zodpovedajúci celkovému počtu previazaných dvojíc qubitov v systéme) označíme k

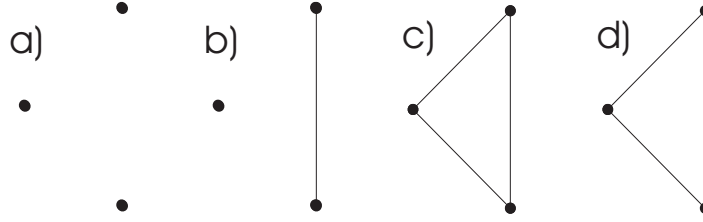
Je pochopiteľné, že pokiaľ máme k dispozícií stav systému, jednoducho k nemu získame graf. Začneme tým, že každému qubitovi priradíme jeden fixovaný vrchol. Potom pre každú dvojicu qubitov spočítame ich redukovaný operátor a z neho konkurenciu. V prípade, že konkurencia je nenulová, spojíme vrcholy grafu zodpovedajúce qubitom hranou. Príklady grafov pre rôzne stavy troch qubitov sú na obrázku (6.1).

Je tiež zrejmé, že graf v sebe ukrýva ďaleko menšie množstvo informácií ako stav samotný. Nie sú v ňom zakódované stavy jednotlivých qubitov, viacčasticové previazania ani sila dvojčasticových kvantových korelácií. Preto neprekvapuje, ak jednotlivým grafom zodpovedá veľké množstvo stavov, reprezentácia nie je a ani nemôže byť jednoznačná. Slúži totiž na zjednodušenie pohľadu a zmenšenie množstva parametrov charakterizujúcich stav, ktoré rastie exponenciálne s množstvom qubitov.

Otázka zo začiatku kapitoly sa pri použití grafov zjednodušuje. Stačí sa pýtať, či existuje pre každý možný graf fyzikálny stav. Pochopiteľne, odpoveď na túto otázku bude komplikovanejšia. Počet možných grafov rastie rádovo exponenciálne s počtom qubitov (ak neuvažujeme symetrie, ktoré počet grafov obmedzujú, prichádzame k vzorcu $2^{\binom{N}{2}}$), preto začnem s analýzou pre malý počet častíc.

6.2 Previazané grafy pre tri qubity

Najmenší netriviálny systém, ktorý sa oplatí skúmať, pozostáva z troch qubitov. Pre jediný qubit totiž nemá zmysel hovoriť o previazaní a dva qubity buď previazané sú alebo nie sú a obe možnosti majú jednoduché príklady (faktorizovaný a Bellov stav). Obrázok (6.2) ukazuje štyri prípady, ktoré môžu pre previazané grafy troch častíc vzniknúť. Pre prvé tri prípady nájdeme zodpovedajúci stav veľmi ľahko.



Obrázok 6.2: Previazané grafy pre tri qubity. Zľava zodpovedajú napríklad úplne separovanému stavu, zlúčeniu Bellovho stavu a faktorizovaného tretieho qubitu. Ďalej W-stavu troch qubitov a jedinému netriviálnemu stavu d).

- Pre stav a) je to napríklad úplne faktorizovaný stav $|000\rangle$ alebo GHZ stav $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$
- Stav b) zodpovedá napríklad kombinácii Bellovho stavu a tretieho nezávislého qubitu $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes |0\rangle$
- c) môže byť reprezentovaný W-stavom $\frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$

Jediná otázka zostáva pri švrtom grafe. Môže existovať stav, pri ktorom je jeden qubit previazaný s ďalšími dvoma, ale tieto qubity už navzájom previazané nie sú? Intuitívne sú dve možné odpovede rovnako dobré, pretože na jednej strane niet dôvodu, aby to nebolo možné, ale na druhej si vieme predstaviť, že silné previazanie dvoch dvojíc implikuje previazanie aj na tretom páre.

V skutočnosti sú obe predstavy správne. *Silné* previazanie oboch párov naozaj bude implikovať existenciu previazania aj medzi zvyšnými qubitmi (bližšia diskusia v závere práce), avšak keďže v tomto prípade sa o silu nezaujímame, stav zodpovedajúci grafu d) vieme nájsť. Jeden z mnohých príkladov je stav

$$|\Phi\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \gamma|110\rangle + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}|111\rangle. \quad (6.1)$$

Konkurencia medzi prvými dvoma qubitmi je identicky nulová, zatiaľ čo C_{13} a C_{23} bude pre netriviálne zvolené parametre α, β, γ nenulová. Dokázali sme teda, že pre tri qubity existujú stavy pre všetky štyri možné grafy.

6.2.1 Čisté a zmiešané stavy

Pri diskusii v predchádzajúcej sekcii sme implicitne pracovali priamo s čistými stavmi. Ako sa ukáže neskôr, obtiažnosť problému hľadania stavov pre definovaný graf je ďaleko vyššia, ak sa obmedzíme na čisté stavy oproti zmesiam. Tu sa pokúsím ukázať, že vo všeobecnosti ak nájdeme čistý stav, ktorý vyhovuje podmienkam grafu, existuje aj zmes, ktorá vyhovuje tej istej podmienke.

V priestore všetkých stavov predstavujú čisté stavy extrémálne body. Okrem iného z toho vyplýva, že v každom okolí čistého stavu sa vyskytuje aspoň jeden (v skutočnosti nekonečne veľa) zmiešaných stavov. Konkurencia ako miera previazania je spojitá funkcia vlastných hodnôt matice R , ktorá je zasa analyticky určená z matice redukovaného operátora (detaily v kapitole o previazaní, rovnice (3.41) až (3.43)). Z definície konkurencie tiež vyplýva, že je

nulová aj vtedy, ak samotná funkcia definujúca konkurenciu klesá pod nulu (v definícii sa vyskytuje orezanie záporných hodnôt, ktoré robí z pôvodne analytickej funkcie len spojitú). Preto nie je problém vybrať z okolia nájdeného čistého stavu zmiešaný stav tak, aby bol *dostatočne blízko* k pôvodnému stavu, aby sa charakteristiky previazania dané konkurenciou nezmenili. Pojem dostatočne blízko je pritom vymedzený práve veľkosťou konkurencií v nájdenom stave.

6.3 Previazané grafy pre N qubitov

6.3.1 Zmiešané stavy

Problém existencie či neexistencie stavov v prípade, že požadujeme previazanie medzi definovanými párami qubitov už bol sčasti riešený v Dürovom článku [32]. Podstatný rozdiel v našom prístupe je, že nepožadujeme len existenciu previazania na definovaných stavoch, ale aj neprítomnosť kvantových korelácií na miestach, kde si to neželáme. Napriek tomu, pre zmiešané stavy môžeme využiť Dürom navrhnutý stav a ukázať, že vskutku spĺňa aj naše, silnejšie požiadavky.

Pre počet hrán v grafe existuje zrejmé ohraňenie

$$0 \leq k \leq \frac{N(N-1)}{2}. \quad (6.2)$$

Definujme si množinu S s k prvkami. Prvky tejto množiny sú dvojice qubitov $i < j$, medzi ktorými požadujeme existenciu previazania, teda

$$\begin{aligned} \{i, j\} \in S &\iff C(i, j) > 0 \\ \{i, j\} \notin S &\iff C(i, j) = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Stav v tvare

$$|\Psi\rangle_{ij} = |\Psi^+\rangle_{ij}|0\dots 0\rangle_{\overline{ij}} \quad (6.4)$$

vykazuje previazanie len medzi qubitmi i a j , nikde inde nie, ak v rovnici (6.4) reprezentuje stav $|\Psi^+\rangle_{ij} = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ maximálne previazaný stav práve medzi požadovaným párom qubitov. V ďalšom kroku urobíme štatistickú zmes všetkých takých stavov (6.4), ktoré zodpovedajú požadovaným párom:

$$\rho = \frac{1}{k} \sum_{\{i, j\} \in S} |\Psi\rangle_{ij} \langle \Psi|_{ij}. \quad (6.5)$$

Matica vybraných dvoch qubitov i a j v prípade $\{i, j\} \in S$ má tvar

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1/2k & 0 \\ 0 & 1/2k & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

a z nej vypočítame konkurenciu

$$C_{ij} = \frac{1}{k}. \quad (6.7)$$

V opačnom prípade $\{i, j\} \notin S$ bude mať matica hustoty tvar

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

a konkurencia bude evidentne nulová (to je vidieť na prvý pohľad už z toho, že čiastočná transpozícia maticu nemení).

Na základe tejto analýzy môžeme tvrdiť, že stav v tvare (6.5) zodpovedá grafu definovanému počtom qubitov N a množinou previazaných párov S .

6.3.2 Čisté stavy

Napriek tomu, že v citovanom článku [32] boli navrhované spôsoby hľadania reprezentácie špecifických grafov pre čisté stavy, nespĺňali podmienku neexistencie previazania tam, kde hrana nie je zadaná. Jednalo sa skôr o maximalizáciu previazania na definovaných hranách bez ďalších vedľajších podmienok. Okrem toho, Dür sa zaoberal len špecifickými grafmi (alebo v jeho terminológii molekulami) s vysokou symetriou.

My sme zvolili iný prístup k problému. Zoberme stav N qubitov ($N > 4$) v tvare

$$|\Psi\rangle = \alpha|0..0\rangle + \beta|1..1\rangle + \sum_{\{i,j\} \in S} \frac{\gamma}{\sqrt{k}} |1\rangle_i |1\rangle_j |0\dots 0\rangle_{\overline{ij}} \quad (6.9)$$

s normalizačnou podmienkou $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. V ďalšom sa pokúsim ukázať, že tento stav zodpovedá grafu definovanému množinou S podľa rovnice (6.3). Na to je potrebné ukázať dve veci.

Najskôr ukážem, že v prípade $\{i, j\} \in S$ je redukovaná matica qubitov i a j naozaj previazaná. Stav ρ_{ij} sa dá vyjadriť v tvare:

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 \frac{k-n_i-n_j+1}{k} & 0 & 0 & \frac{\alpha\gamma^*}{\sqrt{k}} \\ 0 & |\gamma|^2 \frac{n_i-1}{k} & |\gamma|^2 \frac{n_{ij}}{k} & 0 \\ 0 & |\gamma|^2 \frac{n_{ij}}{k} & |\gamma|^2 \frac{n_j-1}{k} & 0 \\ \frac{\alpha^*\gamma}{\sqrt{k}} & 0 & 0 & |\beta|^2 + \frac{|\gamma|^2}{k} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

kde n_i je počet hrán vychádzajúcich z i -teho vrcholu (počet qubitov, ktoré sú previazané s i -tym qubitom) a n_{ij} je počet vrcholov, ktoré sú priamo hranami spojené s vrcholmi i a j (počet qubitov, ktoré sú previazané a i -tym a j -tym qubitom). Pre tieto parametre platia nasledujúce nerovnosti:

$$\begin{aligned} 1 &\leq n_i \leq k; \\ 0 &\leq n_{ij} < \frac{k}{2}; \\ 2 &\leq n_i + n_j \leq k + 1; \\ 1 &\leq n_i n_j \leq \frac{(k+1)^2}{4}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ich platnosť je ľahko odôvodniteľná ak si uvedomíme, že počet hrán vychádzajúcich z daného qubitu nie je väčší ako celkový počet hrán, na každý qubit priamo previazaný s i -tým aj j -tým qubitom sa "spotrebujú" dve hrany a maximum funkcie $n_i n_j$ pri použití tretej nerovnosti je práve $\frac{(k+1)^2}{4}$.

Jedna z vlastných hodnôt čiastočne transponovaného (PPT) operátora (6.10) je

$$\lambda = \frac{|\gamma|}{2k} \left(|\gamma| (n_i + n_j - 2) - \sqrt{4|\alpha|^2 k + |\gamma|^2 (n_i - n_j)^2} \right). \quad (6.12)$$

Aby sme ukázali, že stav ρ_{ij} je naozaj previazaný, stačí ukázať, že vlastná hodnota (6.12) je záporná. V netriviálnom prípade $|\gamma| > 0$ (inak by sa nám stav (6.9) redukoval na GHZ stav) stačí ukázať, že:

$$|\gamma|^2 (n_i + n_j - 2)^2 < 4|\alpha|^2 k + |\gamma|^2 (n_i - n_j)^2. \quad (6.13)$$

S použitím nerovnic (6.11) sa redukuje podmienka (6.13) na

$$\begin{aligned} |\gamma|^2 (n_i + n_j - 2)^2 &< |\gamma|^2 k^2 \leq 4|\alpha|^2 k \\ 4|\alpha|^2 k &\leq 4|\alpha|^2 k + |\gamma|^2 (n_i - n_j)^2. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Postačujúca podmienka na to, aby bol operátor (6.10) previazaný je teda

$$|\gamma|^2 k \leq 4|\alpha|^2. \quad (6.15)$$

V predchádzajúcej časti som ukázal, že navrhovaný stav má naozaj všetky páry qubitov, ktorých previazanie vyžadujeme, skutočne previazané. Aby sa ale tento stav dal asociovať s grafom určeným množinou S , musíme ešte ukázať, že zvyšné páry previazané nie sú, teda konkurencia ich redukovaných operátorov je nulová.

Redukovaný operátor hustoty pre qubity i a j ; $\{i, j\} \notin S$ má tvar

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 \frac{k - n_i - n_j}{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\gamma|^2 \frac{n_i}{k} & |\gamma|^2 \frac{n_{ij}}{k} & 0 \\ 0 & |\gamma|^2 \frac{n_{ij}}{k} & |\gamma|^2 \frac{n_j}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

pričom platia nerovnosti

$$\begin{aligned} 0 &\leq n_i \leq k; \\ 0 &\leq n_{ij} \leq \frac{k}{2}; \\ 0 &\leq n_i + n_j \leq k; \\ 0 &\leq n_i n_j \leq \frac{k^2}{4}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Nerovnosti sú veľmi podobné ako v predchádzajúcom prípade (6.11), jediný rozdiel je v tom, že z vrcholov i a j nevychádzajú žiadne hrany.

Namiesto toho, aby som overil nezápornosť všetkých vlastných hodnôt čiastočne transponovanej matice (6.16), spočítam priamo jej konkurenciu. Vlastné hodnoty operátora R definovaného v rovnici (3.42) sú

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 &= |\alpha\beta|^2 + |\gamma|^2 \frac{k - n_i - n_j}{k}; \\ \lambda_{3,4} &= |\gamma|^4 \left(\frac{n_{ij} \pm \sqrt{n_i n_j}}{k} \right)^2; \quad \lambda_4 \geq \lambda_3. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Vzhľadom na definíciu konkurencie (3.43) stačí ukázať, že $\lambda_1 \geq \lambda_4$ (Ak sú totiž dve najväčšie vlastné hodnoty rovnaké, funkcia $\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}$ zaručene nebude kladná). Na to, aby sme podmienku splnili, potrebujeme mať

$$|\alpha\beta|^2 + |\gamma|^2 \frac{k - n_i - n_j}{k} \geq |\gamma|^4 \left(\frac{n_{ij} + \sqrt{n_i n_j}}{k} \right)^2. \quad (6.19)$$

S použitím nerovností (6.17) sa táto podmienka redukuje na postačujúcu

$$|\alpha\beta|^2 \geq |\gamma|^4, \quad (6.20)$$

ktorá zaručí, že stav (6.16) bude separabilný.

Pri porovnaní podmienok (6.15) a (6.20) je zrejmé, že nie je problém obe naraz splniť. Stačí zvoliť len dostatočne veľké α v porovnaní s γ . Malá γ zasa na druhej strane vedie k malej miere previazania (zjavne $C_{ij} \rightarrow 0$ ak $\gamma_{ij} \rightarrow 0$ pre každé i, j), preto je vhodné zvoliť hranične veľké gamy. To je možné urobiť nezávisle od definície grafu; vtedy dostávame

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k}{\sqrt{k^2 + 2k + 4}}; \\ \beta &= \frac{2\alpha}{k}; \\ \gamma &= \alpha \sqrt{\frac{2}{k}}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Po dosadení do stavu (6.9) dostaneme stav

$$|\Psi\rangle = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 2k + 4}} |0..0\rangle + \frac{2}{\sqrt{k^2 + 2k + 4}} |1..1\rangle + \sum_{\{i,j\} \in S} \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{k^2 + 2k + 4}} |1\rangle_i |1\rangle_j |0...0\rangle_{\overline{ij}}. \quad (6.22)$$

Tento stav je reprezentovaný grafom, ktorý je definovaný počtom qubitov N a množinou previazaných párov S .

Týmto som ukázal, že pre každý previazaný graf existuje čistý stav, ktorý je reprezentovaný týmto grafom. Navyše, tento čistý stav je konštruovaný vždy len superpozíciou maximálne N^2 vektorov z Hilbertovho priestoru, ktorého rozmer je exponenciálne väčší ($\dim(H) = 2^{N+1} - 2$). Výber týchto vektorov je pritom nezávislý od definície grafu.

6.4 Váňované grafy

6.4.1 Definícia

Ako bolo spomenuté v úvode kapitoly, do definície váňovaných grafov už bude vstupovať celá sada reálnych parametrov, určujúca miery previazania medzi jednotlivými dvojicami qubitov. Zvyšná časť definície previazaných grafov zostáva zachovaná:

- Stav systému N qubitov zodpovedá grafu s N vrcholmi. Qubity sú rozlíšiteľné a označené, rovnako ako vrcholy, číslami 1 až N

- Jednotlivé vrcholy grafu môžu byť spojené hranami jedného druhu, ktoré sú neorientované a váhované reálnym číslom medzi 0 a 1, označeným C_{ij} podľa qubitov, ktoré hrana spája
- Graf je určený počtom vrcholov N a sadou parametrov C_{ij} , $i, j \in \langle 1, N \rangle$, kde $Konkurencia(\rho_{ij}) = C_{ij} = C_{ji}$ a $C_{ii} = 0$

Podobne ako v ostatných prípadoch, aj tu je veľmi jednoduché podľa známeho stavu určiť príslušný graf. Stačí spočítať konkurencie všetkých dvojíc qubitov. Budeme preto riešiť len opačnú problém: Ako na základe známych parametrov C_{ij} určiť parametre stavu, prípadne rozhodnúť, že daný stav neexistuje.

6.4.2 Príklady

V niektorých prípadoch sa dá veľmi rýchlo rozhodnúť, že zadané parametre grafu nemôžu reprezentovať žiaden fyzikálny stav. Typickým príkladom pre túto situáciu je konfigurácia, pri ktorej platí:

$$\exists i, \sum_j C_{ij}^2 > 1.$$

Takýto stav by porušoval CKW nerovnosti [28] a preto nie je možná jeho fyzikálna realizácia¹.

Druhým zaujímavým príkladom sú stavy, ktoré vykazujú vysokú mieru symetrie a z tohoto dôvodu umožňujú presné analytické, alebo aspoň spoľahlivé numerické riešenie. Koashi, Bužek a Imoto vo svojej práci [34] rozoberali prípad, keď sú všetky qubity v systéme previazané do rovnakej miery (tzv. previazaná sieť) a hľadali maximum tejto miery (s použitím konkurencie). Dokázali, že toto maximum je naplniteľné a jedným z príkladov je W-stav (symetrický stav obsahujúci práve jeden qubit v stave 1, definovaný v tretej kapitole) [34]

$$\begin{aligned} |W\rangle_N &= |N-1; 1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} (|0..01\rangle + |0..010\rangle + \dots + |10..0\rangle), \end{aligned} \quad (6.23)$$

Konkurencia medzi každou dvojicou qubitov je

$$C_{web} = \frac{2}{N},$$

čo je podstatne menej ako maximum implikované CKW nerovnosťami, teda

$$C_{CKW} = \frac{1}{\sqrt{N-1}}. \quad (6.24)$$

¹CKW nerovnosti pre počet qubitov väčší ako 3 nikdy neboli dokázané, preto sa uvádzajú len vo forme tvrdenia. Všetky pokusy, vrátane numerických na rôznych počtoch qubitov (podobné pokusy boli súčasťou mojej diplomovej práce) však pri snahe nájsť kontrapríklad zlyhali. V ďalšom preto budem vždy predpokladať, že uvedené nerovnosti platia.

Na druhej strane sa však našlo mnoho zaujímavých stavov, ale aj fyzikálnych procesov (napríklad proces kvantovej homogenizácie), pri ktorých sú tieto nerovnosti saturované. Vo všeobecnosti majú tieto stavy a procesy jednu spoločnú charakteristiku - sú v nich dominujúce dvojčasticové väzby, resp. interakcie v porovnaní s viacčasticovými.

Z toho vidíme, že splnenie uvedených nerovností je len nutnou podmienkou pre existenciu stavu. Existujú však triedy konfigurácií, ktoré nerovnosti splňajú, ale stav pre nich neexistuje. Typickým príkladom je úplne symetrická konfigurácia s požadovanou konkurenciou na každej dvojici $C_{web} < C < C_{CKW}$. Na druhej strane, požiadavka na úplne symetrický stav so vzájomným previazaním menším ako povolené maximum (6.24) je ľahko splniteľná stavom

$$|\Psi\rangle_{web} = \sqrt{\frac{CN}{2}}|W\rangle_N + \sqrt{1 - \frac{CN}{2}}|0\dots 0\rangle. \quad (6.25)$$

Výpočet konkurencie je v tomto prípade veľmi jednoduchý a vychádza očakávaná hodnota C .

Podstatne komplikovanejším príkladom (z iného pohľadu však druhým najjednoduchším) je konfigurácia, keď je jeden qubit výnimočný, avšak ostatné sú znova z pohľadu previazania úplne rovnocenné (tzv. hviezdicový graf). Takýto systém je charakterizovaný dvoma parametrami, konkurenciou medzi vybraným qubitom a ľubovoľným zostávajúcim (C_{main}) a konkurenciou medzi ostatnými qubitmi navzájom (C_{mutual}). Podobný systém môže byť zaujímavý napríklad z pohľadu kvantovej komunikácie v situáciách, kde je skupina rovnocenných partnerov riadená jedným vedúcim, ktorý potrebuje maximalizovať svoje možnosti komunikácie s podriadenými, ale z bezpečnostného hľadiska aj zamedziť ich vzájomnej komunikácii.

Pokiaľ by sme mali v úmysle získať navyššie možné previazanie medzi prvým a ostatnými qubitmi, môžeme použiť stav

$$|\Psi\rangle_{star} = \sqrt{\frac{1}{2}}|1\rangle|0\dots 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|0\rangle|W\rangle_{N-1}. \quad (6.26)$$

Aj tu sa jednoduchou kalkuláciou dá presvedčiť, že konkurencia saturuje CKW nerovnosti, teda

$$C_{main} = \frac{1}{\sqrt{N-1}}. \quad (6.27)$$

Bohužiaľ tým však umožňujeme aj komunikáciu medzi ostatnými časťami navzájom, pretože

$$C_{mutual} = \frac{1}{N-1}, \quad (6.28)$$

takže v tomto prípade (napríklad z pohľadu neváhovaných previazaných grafov) sa jedná skôr o formu previazanej siete, než o typický hviezdicový graf. Položme si teda podmienku na nulové previazanie medzi ostatnými qubitmi (teda $C_{mutual} = 0$) a preskúmajme možnosti v tomto prípade. Dalo by sa očakávať, že podmienka maximálnej konkurencie C_{main} bude striktnejšia, nakoľko sme obmedzili priestor možných stavov. Je tomu tak však iba čiastočne.

Uvážme stav

$$|\Psi\rangle_{star} = \sqrt{\frac{1}{2}}|0\dots 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\alpha|1\rangle|W\rangle_{N-1} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}|1\dots 1\rangle, \quad (6.29)$$

kde

$$\alpha \leq \frac{(N-1)(\sqrt{N^2 - 4N + 5} - 1)}{(N-2)^2} = \alpha_{max} < 1. \quad (6.30)$$

Určenie parametra α_{max} zaručuje, že previazanie medzi ostatnými qubitmi bude rovné nule. Konkurencia (pre $\alpha = \alpha_{max}$) je analyticky spočítateľná, jedná sa však o veľmi komplikovaný

a rozsiahly vzorec. Keďže však očakávame, že by svojou formou mohla pripomínať hranicu (6.27), môžeme ju rozviesť do Taylorovho radu práve v tejto premennej a dostávame

$$C_{main} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \left(1 - \frac{1}{4(N-1)^2} - \frac{1}{4(N-1)^3} + \dots \right). \quad (6.31)$$

Ako je vidieť, pre veľké N je hranica možnej konkurencie veľmi blízka maximálnej hodnote danej CKW nerovnosťami. Rozdiel sa stiera už aj pri nízkom počte qubitov, keď pre $N = 4$ je $C_{max} \cong 0.577$ dosiahnuteľná konkurencia $C_{main} \cong 0.555$.

Pokiaľ by sme požadovali z rôznych dôvodov konkurenciu medzi prvým a ostatnými qubitmi menšiu ako (6.31), je možné to dosiahnuť vhodnou voľbou parametra α . Analyticky nie je možné explicitne vyjadriť funkciu $\alpha(C)$, avšak numericky pre dané C je vždy možné α spočítať. Jedinou neznámou preto ostáva oblasť parametrov $C_{main} < C \leq C_{max}$, ktorá je zaujímavá hlavne pre menšie hodnoty N . Príklad $N = 3$ ukazuje, že C_{max} nie je tesné ohraňovanie, nedá sa však dokázať ani fakt, že by ním bol nami odvodený limit.

6.4.3 Všeobecné riešenie

Ako som spomenul vyššie, CKW nerovnosti definujú všeobecnú hranicu pre maximálne previazanie v stavoch mnohých qubitov. Na druhej strane som však na príkladoch ukázal, že tieto nerovnosti nie sú tesné a tvoria len nutnú podmienku existencie danej konfigurácie. Pre lepšie pochopenie a porozumenie problematiky by sa dalo pokračovať rovnakým smerom, akým išli autori [28] a pokúšať sa nájsť komplikovanejšie a presnejšie ohraňovania pre neexistenciu istých čistých či zmiešaných stavov.

Ja som sa rozhodol pokračovať z druhého konca. Dosiaľ totiž neboli (okrem špecifických príkladov uvedených vyššie, prípadne potrebných na implementáciu známych protokolov) zadefinované všeobecné podmienky podobné CKW, ktoré by garantovali existenciu stavu pre danú konfiguráciu, ak táto spĺňa definované podmienky. Ako sa ukázalo, problém definície tohoto typu nerovností je o čosi zložitejší ako v prípade CKW. Vo všeobecnom prípade je len postačujúcou podmienkou a vyžaduje relatívne komplikovaný dôkaz (na druhej strane je veľmi dôležité, že tieto podmienky sú, na rozdiel od CKW, dokázané).

Zoberme stav

$$|\Psi\rangle = \alpha|A\rangle + \sum_{\{i,j\}} \gamma_{ij}|B_{ij}\rangle, \quad (6.32)$$

kde

$$\begin{aligned} |B_{ij}\rangle &\equiv (|11..0_i..0_j..1\rangle + |00..1_i..1_j..0\rangle); \\ |A\rangle &\equiv (|00..0\rangle + |11..1\rangle). \end{aligned}$$

Reálne pozitívne parametre α a γ_{ij} spĺňajú podmienku normovania

$$2\alpha^2 + 2 \sum_{\{i,j\}} \gamma_{ij}^2 = 1. \quad (6.33)$$

Sumy v rovniciach (6.32) a (6.33) bežia cez všetky páry $i < j$, $i, j \in N$ (alebo ekvivalentne cez všetky páry $i, j \in N$ s obmedzením $\gamma_{ij} = 0$ pre $j \leq i$). Značná permutačná symetria tohto vstupného stavu nám dovolí spočítať explicitne konkurenciu (čo je vo všeobecnosti nemožné,

nakol'ko v definícii konkurencie sa nachádza maximum, ktoré znemožňuje analytické vyjadrenie hodnoty), ktorá vychádza

$$C_{ij} = \max \left\{ 2 \left(2\alpha\gamma_{ij} - \sum_k \gamma_{ki}^2 - \sum_k \gamma_{kj}^2 \right), 0 \right\}, \quad (6.34)$$

za podmienky

$$\alpha \geq 2\gamma_{\max}\sqrt{N-2}, \quad (6.35)$$

kde $\gamma_{\max} = \max_{i,j}(\gamma_{ij})$. Detaily výpočtu sú uvedené v Dodatku **A**.

Možnosť vyjadriť konkurenciu ako funkciu parametrov stavu γ_{ij} s jedinou a jednoduchou podmienkou (6.35) nám umožnila pokračovať v riešení problému analyticky. Sada $\frac{N(N-1)}{2}$ nelineárnych rovníc (6.34) spája parametre stavu γ_{ij} (parameter α je jednoznačne definovaný podmienkou romovania) a konkurencie dvojíc qubitov. Aj tu sa ukazuje výhodnosť voľby stavu vo forme (6.32), keď počet voľných parametrov aj ich indexácia je rovnaká ako počet vstupných parametrov. V zásade jediné, čo teraz potrebujeme, je preto obrátiť dané rovnice a vyjadriť γ_{ij} ako funkciu C_{ij} .

To však nie je z matematického hľadiska vôbec jednoduchá úloha. Sada rovníc je vysoko previazaná (na výpočet jednej konkurencie potrebujeme približne $2N$ gám a podobné by to bolo aj pri obrátení rovníc), gamy sú ohraničené ako parametre stavu a sledovanie neanalytickej okrajovej podmienky by bolo veľmi náročné. Navyše je z fyzikálneho hľadiska evidentné, že nie pre každú sadu C_{ij} (typicky napríklad pre sadu porušujúcu CKW nerovnosti) bude existovať vhodná sada γ_{ij} .

V ďalšom sa preto pre všeobecný prípad obmedzím len na otázku existencie riešenia a ukážem postup, ako numericky toto riešenie nájsť. Za týmto účelom si však budem musieť postaviť podmienku, obmedzujúcu vstupné konfigurácie a zjavne silnejšiu ako CKW. Najjednoduchšou voľbou je ohraničiť z vrchu všetky možné konkurencie v systéme konštantou závislou len na počte qubitov N , teda

$$C_{ij} \leq C_{\max}, \quad (6.36)$$

kde pre C_{\max} je dolný odhad $\frac{1}{4N}$. Teraz už môžeme vysloviť tvrdenie, že

Teorém *Pre každú konfiguráciu splňajúcu podmienku (6.36) existuje stav vo forme (6.32), kde všetky páry qubitov majú požadované dvojčasticové previazanie.*

Naznačím tu iteračný algoritmus pre nájdenie parametrov γ_{ij} , ktorého presný popis (spolu s dôkazom konvergencie, rovnako ako presným odvodením konštanty C_{\max} je uvedený v Dodatku **A**). Začneme so stavom (6.32) zodpovedajúcim konfigurácii

$$C_{ij} = C_{\max}$$

pre všetky i, j . Vtedy je jednoduché (z dôvodu úplne symetrie systému) spočítať príslušné γ_{ij} , ktoré tiež nie je závislé od indexov. V ďalšom budeme postupne, krok po kroku meniť parametre stavu a nastavovať ho na želané konkurencie. Po každom kroku (v ktorom nastavujeme špecifickú dvojicu C_{ij}) bude platiť, že

- Hodnota konkurencie medzi qubitmi i a j je presne taká, akú požadujeme
- Všetky ostatné konkurencie sú väčšie alebo rovné ako pred posledným krokom

- Parameter γ_{ij} je menší ako pred posledným krokom
- Všetky ostatné parametre γ sú menšie alebo rovné ako pred posledným krokom
- Iteračný limit (všetky parametre γ rovné nule) zodpovedá nulovej konkurencii. Keďže sa k požadovanej konfigurácii vždy blížíme (z pohľadu konkurencii) zhora, musíme v priebehu iterácie (pri konečnom počte krokov s konečnou presnosťou) nájsť hľadaný stav.

Existencia hľadaného stavu je dokázaná v Dodatku **A** pomocou existencie limity iterácie. Urobili sme však aj numerické pokusy, ktoré ukázali, že postup veľmi rýchlo konverguje. Pri náhodne zvolenej konfigurácii vyhovujúcej podmienke (6.36) už po niekoľkých desiatkach krokov (pod jedným krokom rozumiem postupnú zmenu všetkých parametrov γ_{ij}) bola dosiahnutá absolútna presnosť v C_{ij} lepšia ako 10^{-6} na najhoršej dvojici.

Súčasťou práce na previazaných grafoch bol aj návrh ich efektívnej prípravy s použitím kvantových logických sietí. Dokázali sme, že stav v navrhovanej forme je možné zostrojiť v exponenciálne kratšom čase ako všeobecný stav za použitia len konštantného množstva pomocných qubitov (tri). Tejto problematike sa však v práci nebudem ďalej venovať, motiváciu, popis aj výsledky je možné nájsť (rovnako ako vyššie uvedené fakty) v článku [6].

Kapitola 7

Korelované grafy

V predchádzajúcej kapitole som sa venoval zdieľaniu previazania, kvantových korelácií v systémoch mnohých qubitov. V nasledujúcich riadkoch rozšírim skúmaný problém aj na klasické korelácie. Ukážem, že rovnako ako pre previazané grafy, pre každý korelovaný graf existuje zmiešaný stav, ktorý je reprezentovaný týmto grafom. Skutočnosť sa ale mení pri čistých stavoch, kde dokážem, že existuje kategória grafov (grafy z takzvanou otvorenou hranou), pre ktoré neexistujú žiadne čisté stavy.

7.1 Definície

Uvažujme všeobecný stav ρ systému S pozostávajúceho z N qubitov. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade, matice hustoty dvojíc častíc sú definované ako

$$\rho_{ij} = \text{Tr}_{S \setminus \{i,j\}}(\rho), \quad (7.1)$$

kde $S \setminus \{i, j\}$ je označenie celého systému s výnimkou qubitov i a j . Pre previazané grafy stačilo, ak sme operátory (7.1) rozdelili do dvoch kategórií. Operátory, ktoré spĺňali podmienku

$$\rho_{ij} = \sum_n \zeta_i^n \otimes \xi_j^n \quad (7.2)$$

sme nazvali separabilné a všetky ostatné neseperabilné, previazané. Pre definíciu korelovaných grafov rozdelíme skupinu operátorov spĺňajúcich podmienku (7.2) na dve skupiny. Ak suma obsahuje aspoň dva členy ($n > 1$), nazveme dvojčasticový operátor klasicky korelovaný, v opačnom prípade bude nekorelovaný (faktorizovaný), spĺňajúci tiež podmienku

$$\rho_{ij} = \rho_i \otimes \rho_j, \quad (7.3)$$

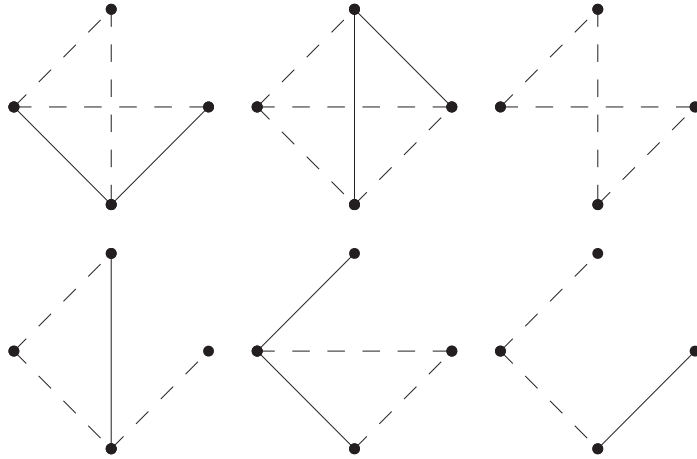
kde

$$\rho_i = \text{Tr}_{S \setminus \{i\}}(\rho) \quad (7.4)$$

a $S \setminus \{i\}$ označuje celý systém okrem i -teho qubitov.

S takto definovanými skupinami dvojčasticových operátorov môžeme zaviesť koncept korelovaných grafov (niekoľko príkladov korelovaných grafov pre štyri qubity je na obrázku (7.1))

- Systém N qubitov je reprezentovaný grafom s N vrcholmi;



Obrázok 7.1: Príklady korelovaných grafov pre štyri qubity. Plná čiara označuje previazanie, čiarkovaná čiara klasickú koreláciu. Pokiaľ qubity nie sú spojené žiadnou hranou (na rozdiel od previazaných grafov) to znamená, že ich stav je faktorizovaný a nevykazuje ani klasickú koreláciu

- Vrcholy v grafe môžu byť spojené dvoma druhmi hrán;
- Hrana previazania (plná čiara) označuje kvantovú koreláciu medzi prislúchajúcimi qubitmi;
- Korelačná hrana (čiarkovaná čiara) označuje klasickú (a len klasickú) koreláciu medzi prislúchajúcimi qubitmi;
- Žiadna hrana medzi qubitmi vyjadruje fakt, že ich stav je plne faktorizovaný, nevykazuje žiadnu koreláciu (7.3).

Už z definície grafu je jasné, že pokiaľ máme k dispozícii stav systému (či už čistý alebo zmiešaný), dokážeme k nemu skonštruovať graf. Stačí, ak skonštruujeme všetky dvojčasticové operátory prislúchajúce jednotlivým dvojiciam qubitov a otestujeme, do ktorej skupiny (previazané, klasicky korelované, faktorizované) patria. Oveľa zaujímavejšia je otázka, či dokážeme platnosť tohoto tvrdenia otočiť: či ku každému danému grafu dokážeme skonštruovať stav (čistý alebo zmiešaný), ktorý by splňal podmienky dané grafom. Inak povedané, otázka znie, či (nezávisle na sile) môže previazanie alebo klasická korelácia medzi niektorými dvojicami v systéme implikovať klasickú koreláciu (že nemôže implikovať previazanie som ukázal v prechádzajúcej kapitole) medzi inými dvojicami qubitov.

Graf samotný bude vždy zadaný počtom vrcholov N a dvoma množinami neusporiadaných dvojíc vrcholov $\{i, j\}$. V prvej množine S^E budú všetky také dvojice vrcholov, ktoré zodpovedajú previazaným dvojiciam qubitov; $\{i, j\} \in S^E \Leftrightarrow \{i, j\}$ sú previazané. V druhej množine S^C budú korelované dvojice; $\{i, j\} \in S^C \Leftrightarrow \{i, j\}$ sú korelované. Každá dvojica qubitov, ktorých zodpovedajúce vrcholy splňajú $\{i, j\} \notin S^C$ je v nekorelovanom, faktorizovanom stave. Je pochopiteľné, že $S^E \subset S^C$, teda každý previazaný pár je aj korelovaný (pozri kapitolu o klasických koreláciách v kvantovej fyzike). Môžeme teda definovať podmnožinu S^C , množinu klasicky (a len klasicky) korelovaných párov $S^{CC} = S^C \setminus S^E$. Pre jednoduchosť v ďalšom označovaní definujem tiež vektor \vec{m} (dĺžky N), ktorého komponenty m_i označujú

počet vrcholov $\{i, j\} \notin S^C$ s fixným i , teda vrcholov, ktoré nie sú spojené žiadnou hranou s i -tým vrcholom (počet qubitov, ktoré sú nekorelované s i -tým qubitom). Označím celkový počet nekorelovaných dvojíc ako $M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i$. Nerovnice

$$\begin{aligned} 0 &\leq m_i \leq N - 1; \\ 0 &\leq M \leq \frac{N(N - 1)}{2} \end{aligned} \tag{7.5}$$

vyjadrujú základné vlastnosti systému, že počet nekorelovaných qubitov je obmedzený ich celkovým počtom $N - 1$ a celkový počet nekorelovaných dvojíc zasa celkovým možným počtom hrán $N(N - 1)/2$.

7.2 Zmiešané stavy

Hľadanie zmiešaných stavov k zadanému grafu je často o čosi jednoduchšie ako čistých (diskusiu pozri v predchádzajúcich kapitolách). Aj v tomto prípade je tomu tak. Ukážem, že existuje univerzálny tvar zmiešaného stavu, ktorý sa dá na základe parametrov grafu S^E a S^C upraviť tak, aby spĺňal požiadavky na previazanie a korelácie kladené grafom. Tým ukážem, že pre každý korelovaný graf existuje stav, ktorý je reprezentovaný týmto grafom.

Teorém *Zmiešaný stav N qubitov daný rovnicou*

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2(N - 1)^2} \left\{ \left[N^2 - 3N + \frac{1}{2}M + 2 \right] |0\dots 0\rangle\langle 0\dots 0| \right. \\ &+ \sum_{i=1}^N \left[(N - 1) - \frac{1}{2}m_i \right] |0\dots 01_i 0\dots 0\rangle\langle 0\dots 01_i 0\dots 0| \\ &+ \sum_{\{i,j\} \in S^E} |0\dots 01_i 0\dots 0\rangle\langle 0\dots 01_j 0\dots 0| \\ &+ \sum_{\{i,j\} \in S^E} |0\dots 01_j 0\dots 0\rangle\langle 0\dots 01_i 0\dots 0| \\ &+ \sum_{\{i,j\} \notin S^C} \frac{1}{2} |0\dots 01_i 0\dots 01_j 0\dots 0\rangle\langle 0\dots 01_i 0\dots 01_j 0\dots 0| \left. \right\} \end{aligned} \tag{7.6}$$

je reprezentovaný grafom s počtom vrcholov N , daným množinami S^E a S^C .

Najskôr je potrebné ukázať, že stav (7.6) je vôbec fyzikálnym stavom. Normovanie overíme jednoducho, ďalej by sa dalo ukázať, že všetky vlastné hodnoty matice sú kladné. Jednoduchšie je ale uvedomiť si, že stav ρ vznikol ako konvexná kombinácia stavov $|0\dots 0\dots 0\rangle$, $|0\dots 01_i 0\dots 0\rangle$, $|0\dots 01_i 0\dots 01_j 0\dots 0\rangle$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\dots 01_i 0\dots 0\rangle + |0\dots 01_j 0\dots 0\rangle)$, pričom konvexnosť zaručuje fakt, že

$$\left[(N - 1) - \frac{1}{2}m_i \right] \geq \sum_{j, \{i,j\} \in S^E} 1,$$

teda že počet korelovaných párov je vždy väčší, nanajvýš rovný počtu previazaných párov.

V ďalšom najskôr ukážem, že pre každú dvojicu qubitov, ak $\{i, j\} \in S^E$, je ich stav previazaný. V tomto prípade má redukovaný operátor získaný z matice (7.6) tvar

$$\rho_{ij}^E = \frac{1}{2(N-1)^2} \begin{pmatrix} 2N^2 - 6N + 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & N-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Vzhľadom na veľmi jednoduchý tvar matice (7.7) je možné bez problémov spočítať konkurenciu, pričom výsledok

$$C = \frac{1}{(N-1)^2} > 0 \quad (7.8)$$

zaručuje, že všetky dvojice qubitov $\{i, j\} \in S^E$ budú previazané.

Pre každú dvojicu $\{i, j\} \in S^{CC} = S^C \setminus S^E$ požadujeme, aby qubity i a j boli korelované, ale nie previazané. Zodpovedajúci operátor hustoty má tvar

$$\rho_{ij}^C = \frac{1}{2(N-1)^2} \begin{pmatrix} 2N^2 - 6N + 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Na prvý pohľad je zrejmé, že matica je diagonálna a čiastočná transpozícia (PPT) maticu nechá v pôvodnom tvare, nezmenia sa teda ani jej vlastné hodnoty. Tie sú zjavne nezáporné, preto je stav (7.9) separabilný, nevykazuje žiadne kvantové korelácie.

Na určenie prítomnosti klasických korelácií potrebujem najskôr spočítať operátory jednotlivých qubitov ρ_i a ρ_j (7.4) a overiť platnosť (lepšie povedané neplatnosť) rovnice (7.3). Operátory majú tvar:

$$\rho_i = \rho_j = \frac{1}{2(N-1)^2} \begin{pmatrix} 2N^2 - 5N + 3 & 0 \\ 0 & N-1 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

a ich tenzorový súčin

$$\rho_i \otimes \rho_j = \frac{1}{2(N-1)^2} \begin{pmatrix} 2N^2 - 6N + \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N - \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N - \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Je zjavné, že $\rho_i \otimes \rho_j \neq \rho_{ij}^C$ a qubity v stave (7.9) sú korelované, ale nie previazané.

Zostáva už len overiť, že všetky zvyšné páry $\{i, j\} \notin S^C$ sú vo faktorizovanom stave, teda splňajú podmienku (7.3). Ich redukovaný operátor získaný podľa (7.1) ρ^S má presne tvar (7.11), čo znamená, že $\rho_{ij}^S = \rho_i \otimes \rho_j$ a podmienka je splnená.

Týmto sme ukázali, že stav (7.6) reprezentuje grafy dané množinami S^E a S^C , teda pre každý graf daný týmito množinami je možné nájsť zmiešaný stav. Okrem toho, stav (7.6) vykazuje aj ďalšie zaujímavé vlastnosti. Keďže všetky redukované operátory ρ^E ($\{i, j\} \in S^E$) sú rovnaké, aj sila previazania tých qubitov, ktoré previazané byť majú, je rovnaká. Okrem toho, z rovnice (7.10) je zrejmé, že všetky jednočasticové operátory sú rovnaké, a to nezávisle na tom, či, koľko a prípadne akých hrán vychádza z niektorého qubit. Jeho jednočasticový

stav je daný len a len počtom častíc v systéme N . Z bezpečnostného hľadiska to je zaujímavé preto, že ak máme k dispozícii len jednu jediná časticu, nedokážeme zistiť nič o celkovom stave systému, ani keby sme ju mali v mnohých kópiách. Na druhej strane, z dvojčasticových operátorov dokážeme (znova, pri dostatočnom počte kópií) zistiť všetky parametre grafu. To pochopiteľne neznamená, že dokážeme úplne zrekonštruovať samotný fyzikálny stav. Každému grafu zodpovedá veľké množstvo týchto stavov a pomocou informácií o dvojčasticových koreláciách dokážeme len zatriediť neznámy stav do triedy, zodpovedajúcej práve jednému grafu.

7.3 Čisté stavy

Analýza existencie či neexistencie čistých stavov pre jednotlivé korelované grafy je veľmi náročná. Stavy, kde sú špecifické dvojice qubitov faktorizované sa hľadajú len veľmi ťažko. Jedným z dôvodov je, že (na rozdiel od previazania), ak je špecifický stav faktorizovaný, pre jeho okolie to už vo všeobecnosti neplatí. Inak povedané, v Hilbertovom priestore, na ktorom pracujeme, tvoria stavy so špecifickými dvojicami qubitov faktorizovanými (aj lokálne) pod množiny nižších dimenzií (intuitívne sa to dá predstaviť tak, že z ľubovoľného faktorizovaného stavu vždy existuje smer, v ktorom ak sa pohneme ľubovoľne malý krok, objavia sa klasické korelácie). Naviac, numerické Monte-Carlo simulácie sú vhodné v prípade, ak potrebujeme dokázať, že nejaký stav existuje (skôr alebo neskôr sa zvyčajne pri dobre zvolených parametroch objaví). Ak ale potrebujeme ukázať, že stav neexistuje, musíme to urobiť analyticky alebo systematickým numerickým prehľadom priestoru, čo pri väčšom počte qubitov nie je možné.

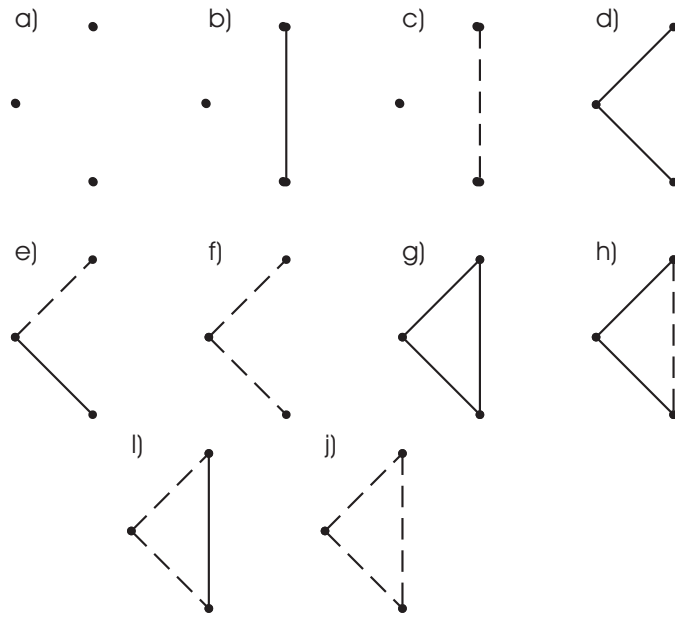
Na začiatku preto podrobne rozoberiem problém korelovaných grafov pre tri qubity. Ukážem, pre ktoré grafy existujú čisté stavy, pre ktoré nie a prečo. V ďalšej časti ukážem existenciu (prípadne neexistenciu) stavov pre niektoré triedy grafov.

7.3.1 Trojčasticové grafy

V prípade troch častíc existuje desať rôznych korelovaných grafov, ktoré sú prezentované na obrázku 7.2. Pre šesť z desiatich grafov dokážeme bez problémov nájsť príklady stavov:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \rightarrow |000\rangle; \\
 \text{b)} & \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle)); \\
 \text{g)} & \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle); \\
 \text{h)} & \rightarrow \frac{1}{2}(|000\rangle + |100\rangle + |110\rangle + |111\rangle); \\
 \text{i)} & \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |011\rangle + |111\rangle); \\
 \text{j)} & \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle).
 \end{aligned}$$

Zvyšné štyri grafy nemajú reprezentáciu na priestore čistých stavov troch qubitov. Nie je obtiažne tento fakt dokázať explicitne, odvolám sa tu ale na nižšie dokázané všeobecné tvrdenie,



Obrázok 7.2: Desať korelovaných grafov pre tri qubity. Plná čiara znázorňuje previazanie, zatiaľ čo čiarkovaná len klasickú koreláciu. Vrcholy, ktoré nie sú spojené žiadnou hranou reprezentujú faktorizovanú dvojicu qubitov.

že neexistujú stavy pre žiadne grafy s otvorenými hranami (hranami, ktoré nie sú súčasťou ani jedného cyklu)¹.

7.3.2 Viacčasticové grafy

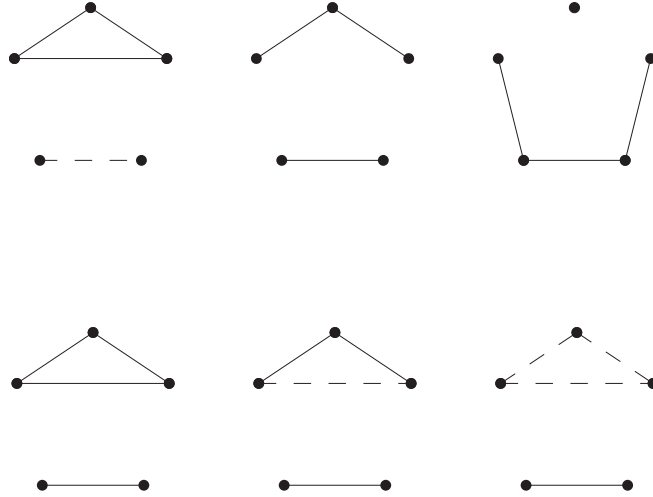
So zvyšujúcim sa počtom častíc narastá počet grafov typicky ako $\exp(N^2)$ a už pre $N = 4$ ich je viac ako 100. Zjavne je preto nutné hľadanie stavov zosystematizovať. Rozdelím všetky grafy na dve základné triedy:

- *Nespojité grafy*: V tejto kategórii budú grafy, v ktorých môžeme vrcholy rozdeliť na dve skupiny (pričom každý vrchol patrí do práve jednej skupiny) a žiadna dvojica vrcholov z rôznych skupín nebude spojená ani hranou previazania, ani korelačnou hranou.
- *Spojité grafy*: V týchto grafov sú každé dva vrcholy spojené buď priamo, alebo prostredníctvom ďalších vrcholov nejakou hranou (pri tomto delení nerozlišujem typy hrán).

Uvážme najskôr kategóriu nespojitých grafov. Pre veľké N bude podiel týchto grafov na celkovom počte klesať, ale je jednoduché rozhodnúť o tom, či pre ne existuje alebo neexistuje čistý stav. Stačí, ak využijem existujúce rozdelenie vrcholov (a teda aj qubitov) na (aspoň) dve časti a označím tieto časti ako podsystemy A a B . Keďže tieto dva podsystemy systému S nesmú byť korelované, musí platiť

$$\rho_S = \rho_A \otimes \rho_B,$$

¹Jedinou výnimkou je graf typu b), teda ak máme izolovanú hranu reprezentujúcu previazanie. Vzhľadom na to, že v takomto prípade môžeme dva previazané qubity od systému oddeliť (lebo ich stav je faktorizovaný vzhľadom na zvyšok systému), v ďalšom sa nebudem týmto prípadom zaoberať.



Obrázok 7.3: Príklady nespojitých grafov pre päť qubitov. V prvom riadku sú tri príklady grafov, ktoré nemajú reprezentanta medzi čistými stavmi (vždy tomu bráni otvorená hrana), v druhom riadku sú tri príklady existujúcich stavov.

kde ρ_S je matica hustoty celého systému a ρ_A a ρ_B sú matice hustoty príslušných podsystémov. Predpokladáme však, že systém S je v čistom stave a teda musí zároveň aj platiť

$$|\Psi\rangle_S = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B. \quad (7.12)$$

Môžem preto vysloviť tvrdenie, že stav $|\Psi\rangle_S$ existuje vtedy a len vtedy, ak existujú stavy $|\psi\rangle_A$ a $|\psi\rangle_B$. Preto platí, že pre nespojitý graf existuje čistý stav, ktorý je reprezentovaný týmto grafom vtedy a len vtedy, ak existuje čistý stav pre obe nespojené časti grafu. Rovnakým spôsobom by som mohol postupovať v delení ďalej, až kým by všetky podsystémy neboli reprezentované spojitými grafmi. Rozhodovanie o triede nespojitých grafov sa teda zredukovalo na rozhodovanie o spojitých grafoch s menším počtom vrcholov.

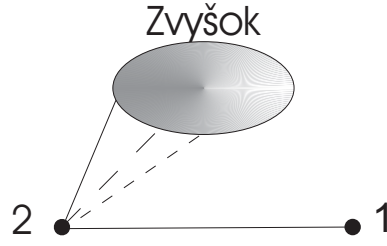
Na obrázku (7.3) je niekoľko príkladov nespojitých grafov, pre ktoré neexistujú (prvý riadok) a existujú (druhý riadok) čisté stavy.

Pre spojitý grafy som nebol schopný nájsť jednoznačné kritérium, ktoré by určovalo, či existuje pre ten-ktorý graf čistý stav, alebo nie. Viem však, že určite neexistuje čistý stav pre všetky grafy (ako už bolo ukázané v prípade troch qubitov). Ak totiž v grafe ($N > 2$) existuje *otvorená hrana* (hrana, ktorá nie je súčasťou žiadneho cyklu), teda existuje v ňom vrchol, ktorý je spojený so zvyškom systému len jedinou hranou, neexistuje čistý stav, ktorý by bol reprezentovaný týmto grafom.

Označím si qubit, ktorý je spojený so zvyškom systému len jedinou hranou, ako *prvý* qubit. Qubit, ktorý je na druhom konci otvorenej hrany (qubit sprostredkovávajúci spojenie so zvyškom systému) označím ako *druhý* qubit. Zvyšok systému budem označovať jednoducho ako *zvyšok*. Presná štruktúra zvyšku nebude v tomto prípade zaujímavá, jediné čo je podstatné je, že zvyšok je spojený aspoň jednou hranou s druhým qubitom (inak by sa nejednalo o spojitý graf). Označenie je schématicky znázornené na obrázku (7.4).

Požadujem, aby bol prvý qubit previazaný, alebo aspoň klasicky korelovaný s druhým qubitom. Musí byť teda v zmiešanom stave a jeho operátor môžem zapísať v tvare

$$\rho_1 = a |\psi\rangle \langle \psi| + (1 - a) |\psi^\perp\rangle \langle \psi^\perp|, \quad (7.13)$$



Obrázok 7.4: Schématické znázornenie usporiadania grafu s otvorenou hranou a označenie jednotlivých jeho častí.

kde $0 < a < 1$ a stavy $|\psi\rangle$ a $|\psi^\perp\rangle$ sú navzájom kolmé, teda $\langle\psi|\psi^\perp\rangle = 0$.

Časť systému označená ako zvyšok musí byť rovnako v zmiešanom stave, keďže požadujeme jej koreláciu s druhým qubitom. Operátor zvyšku ρ_{rest} sa tak dá zapísať v tvare

$$\rho_{rest} = A |\Psi\rangle \langle\Psi| + (1 - A) \rho_{\Psi}^\perp, \quad (7.14)$$

kde $0 < A < 1$ a ρ_{Ψ}^\perp je operátor hustoty $N - 2$ qubitov kolmý na $|\Psi\rangle$, teda $\langle\Psi|\rho_{\Psi}^\perp|\Psi\rangle = 0$. Vyžadujeme, aby prvý qubit nebol korelovaný so zvyškom systému, musí teda pre celkový operátor bez druhého qubit $\rho_{1\oplus rest}$ platiť, že je len tenzorovým súčinom jednotlivých operátorov:

$$\rho_{1\oplus rest} = \rho_1 \otimes \rho_{rest}.$$

Na druhej strane požadujeme, aby celkový stav systému N qubitov bol čistý stav $|\Xi\rangle_{1\oplus 2\oplus rest}$. V istom zmysle preto budem robiť purifikáciu² zvyšku systému spolu s prvým qubitom len pomocou druhého qubit. Musí pritom platiť $\rho_1 = \text{Tr}_{2,rest}(|\Xi\rangle\langle\Xi|)$, $\rho_{rest} = \text{Tr}_{2,1}(|\Xi\rangle\langle\Xi|)$ a $\rho_{1\oplus rest} = \text{Tr}_2(|\Xi\rangle\langle\Xi|)$. Toto však evidentne nie je možné. Aj keď by som predpokladal, že matica ρ_{Ψ}^\perp v rovnici (7.14) je projektor ($\rho_{\Psi}^\perp = |\Psi^\perp\rangle\langle\Psi^\perp|$), dostal by som pre stav systému bez druhého qubit operátor:

$$\begin{aligned} \rho_{1\oplus rest} &= \rho_1 \otimes \rho_{rest} \\ &= aA |\psi\Psi\rangle\langle\psi\Psi| + a(1 - A) |\psi\Psi^\perp\rangle\langle\psi\Psi^\perp| \\ &\quad + (1 - a)A |\psi^\perp\Psi\rangle\langle\psi^\perp\Psi| \\ &\quad + (1 - a)(1 - A) |\psi^\perp\Psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp\Psi^\perp|. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Na purifikáciu takéhoto stavu potrebujem systém minimálne so štyrmi stupňami voľnosti [33], mám však k dispozícii len qubit dva, systém s dvoma stupňami voľnosti. Týmto som dokázal, že pre žiaden spojitý graf s otvorenou hranou a aspoň troma vrcholmi nemôže existovať čistý stav.

²Pod purifikáciou rozumieme rozšírenie podsystemu, ktorý sa nachádza v zmiešanom stave o ďalší podsystem tak, aby sa celý systém nachádzal už v čistom stave. Minimálna veľkosť nového podsystemu vo všeobecnosti závisí od stavu pôvodného systému a je ohraničená nulou (ak bol pôvodný stav čistý) a veľkosťou pôvodného systému (ak je napríklad v úplnej zmesi).

Platí však, že minimálny rozmer nového podsystemu je daný Schmidtovým číslom, ktoré určuje minimálny počet kolmých vektorov použitých pri rozpise matice hustoty do tvaru $\rho = \sum a_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ (pričom $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$).

7.3.3 Ďalšie typy grafov

Previazané siete

Problém je relatívne jednoduchý v prípade, ak je každá dvojica vrcholov spojená nejakou hranou, teda žiadna dvojica nie je vo faktorizovanom stave. Tu môžem použiť stav z predchádzajúcej kapitoly o previazaných grafoch v tvare

$$|\Xi\rangle = \alpha|0..0\rangle + \beta|1..1\rangle + \sum_{\{i,j\} \in S^E} \frac{\gamma}{\sqrt{k}} |1\rangle_i |1\rangle_j |0\dots 0\rangle_{S \setminus \{i,j\}} \quad (7.16)$$

s normalizačnou podmienkou $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ a $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Čistý stav (7.16) je reprezentovaný grafom, v ktorom sú všetky dvojice z S^E previazané a všetky ostatné dvojice klasicky korelované.

Štyri qubity

Ak vylúčim také grafy, o ktorých sa dá na základe už uvedených kritérií rozhodnúť, zostane pre štyri častice približne dvadsať zvyšných grafov (zväčša grafy typu "štvorec", teda grafy s uzavretým kruhom a chýbajúcimi koreláciami na jednej alebo oboch uhlopriečkach). Pomocou Monte-Carlo simulácií sa mi podarilo nájsť pre každý takýto graf čistý stav. Otázka existencie či neexistencie čistých stavov sa tak presúva na päť a viac qubitov.

Pokračovanie v numerických výpočtoch je však mimoriadne náročné, a to z rôznych dôvodov. Jednak, ako som spomínal vyššie, počet grafov rastie veľmi rýchlo. Navyše rastie exponenciálne aj rozmer Hilbertovho priestoru a tým výpočtová náročnosť pre každý jednotlivý graf. Najdôležitejší problém ale je, že "faktorizovanosť" jednotlivých dvojíc nie je možné nájsť numericky, je nutné ju vložiť ako podmienku prehládavania priamo do parametrov programu, čo nie je vždy jednoznačne možné (napríklad pri grafe tvaru "kruh" pre päť častíc by bolo potrebné vložiť päť explicitných podmienok pri zachovaní dostatočnej voľnosti na prehládavanie priestoru).

7.3.4 Ďalšie možnosti postupu

Ako som spomenul vyššie, prípad čistých stavov v sebe skrýva mnohé zaujímavé otázky. Odpoveď aj na tú najjednoduchšiu (ktoré korelované grafy majú fyzikálnu realizáciu) sa hľadá pre väčší počet častíc len veľmi ťažko. Prítom je základom na ďalšie skúmanie problému.

Veľmi zaujímavé by bolo rozšíriť skúmanie aj na váhované korelované grafy. Z principiálneho hľadiska s tým nie je problém, môžeme si zvoliť vhodnú mieru klasickej korelácie, charakterizovať každú hranu dvoma parametrami (miera korelácie a previazania) a skúmať takto vzniknuté grafy.

Aby však toto skúmanie nebolo samoučelné, je rozumné si sformulovať niektoré požiadavky na mieru klasickej korelácie. Aby sa dali obe miery akýmsi spôsobom porovnávať, ohraničím obe nulou a jedničkou (pre žiadnu a maximálnu koreláciu, resp. previazanie). Keďže na čistom stave dvoch qubitov neexistujú iné ako kvantové korelácie (čistý stav dvoch klasických bitov žiadne korelácie vykazovať nemôže), budem tiež požadovať, aby v takomto prípade vykazovali obe miery rovnaké hodnoty.

Ak pridám ďalšiu, tiež dobre pochopiteľnú požiadavku, aby miera klasickej korelácie na ľubovoľnom systéme dvoch qubitov nadubúdala minimálne hodnotu miery previazania, dostanem sa do komplikovanej situácie, nakoľko žiadna z existujúcich mier (ani ich jednoduché

kombinácie či násobky) všetky vyššie uvedené požiadavky nespĺňa. Bolo by preto veľmi zaujímavé definovať takú mieru, ktorá by tieto požiadavky splnila a skúmať jej vlastnosti v porovnaní s existujúcimi mierami.

Kapitola 8

Rekonštrukcie jednoqubitových kvantových operácií

V piatej kapitole som rozobral možnosti odhadu kvantových stavov pri dostatku aj nedostatku potrebných informácií. Uviedol som tiež spôsoby odhadu kvantových operácií v prípade, ak máme k dispozícii všetky potrebné údaje. V tejto časti práce sa budem zaoberať rekonštrukciou kvantových operácií pri nedostatku potrebných informácií. V prvej sekcii sa budem venovať prípadu, ak je štatistika dostatočná, ale obor vstupných stavov je príliš malý, teda nemáme vôbec pokryté niektoré zložky operácie. V druhej časti sa budem venovať veľmi praktickému problému, keď máme k dispozícii priamo výsledky merania vo forme tzv. "klikov" (teda binárnych výsledkov merania priemetu spinu) a chceme z nich zrekonštruovať našu operáciu s použitím Maximum Likelihood (ML) metódy. Na záver tiež uvediem možnosti využitia tejto metódy pri hľadaní najbližšej fyzikálnej operácie k nefyzikálnym (nie úplne pozitívnym, nelineárnym atď.) operáciám.

8.1 Neúplné rekonštrukcie

Každá rekonštrukcia musí byť čo najkonzervatívnejšia; nesmieme rekonštruovanému objektu pripisovať žiadne vlastnosti, ktoré priamo nevyplývajú z nameraných dát [41]. Pri rekonštrukcii operácií z neúplných dát budeme mať tento princíp neustále na pamäti. Pokúsme sa teda navrhnúť spôsob, ako odhadnúť kvantovú operáciu v prípade, ak máme k dispozícii dostatočnú štatistiku, ale len obmedzený rozsah vstupných stavov (tri, dva, jeden, alebo dokonca žiaden).

Práve posledne menovaná situácia skrýva kľúč k celému problému. Máme vyriešenú situáciu, keď máme všetky potrebné dáta. Ak preto navrhneme riešenie situácie pri absolútnom nedostatku dát, všetky ostatné problémy sa budú dať vyriešiť akousi formou extrapolácie. Základná otázka teda znie: Aký má byť náš odhad operácie, ak nemáme o nej žiadne informácie? Ak nám niekto dodal čiernu skrinku, tvrdí (a my mu veríme), že to je jednoqubitová fyzikálna operácia bez pamäte, čo o tej skrinke vieme povedať?

Prvá myšlienka bola využiť rovnaký postup, ako sa používa pri stavoch - navrhnúť teda ako výsledok tú operáciu, ktorá je neváhovaným priemerom všetkých prípustných operácií - v prípade úplného nedostatku meraní priemerom všetkých fyzikálnych operácií. Tento priemer by sa však jednak veľmi ťažko rátal (podmienka úplnej pozitivity je značne komplikovaná),

hlavne však nemáme takú význačnú¹ mieru, cez ktorú by sme mohli priemer robiť. Topológia samotného priestoru operácií je značne komplikovaná: napríklad extrémnymi bodmi nie sú len unitárne operácie (ako by sa dalo predpokladať z analógie so stavmi, ale aj ďalšie operácie. Preto budeme musieť nájsť iný postup, ako vyriešiť problém definovaný v úvode kapitoly.

Vychádzajúc z vyššie uvedeného princípu, nesmieme tejto operácii prisúdiť žiadnu vlastnosť, ktorú jej nevieme dokázať z meraní. A keďže žiadne merania nemáme, nesmieme jej teda prisudzovať žiadnu konkrétnu vlastnosť. Z dôvodov symetrie môžeme predpokladať, že vhodná operácia by mala mať obor hodnôt na stavovom priestore ohraničený guľou s daným polomerom. Keďže niet dôvodu vybrať konkrétny polomer, ostávajú na výber dva extrémne polomery - maximálny (reprezentujúci unitárne operácie) a nulový (reprezentujúci kontrakciu do úplnej zmesi). Lubovoľná unitárna operácia je však extrémnym bodom na priestore všetkých operácií, nemôže byť teda výsledkom žiadnej formy priemerovania cez operácie. Toto by bolo v evidentnom rozpore s pôvodnou myšlienkou získať túto operáciu ako priemer všetkých možných operácií (inak povedané, nevieme priemer urobiť, ale vieme povedať, ktoré výsledky sú určite neakceptovateľné). Jediné možné riešenie preto zostáva kontrakcia všetkých možných stavov do úplnej zmesi (teda zrušenie všetkej informácie, ktorú stav má) a uniformná produkcia zmesi $\mathcal{I}/2$ (detaily v článku [41]). Matematicky vieme teda našu operáciu zapísať ako

$$\varepsilon_0 : \varrho \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{I}. \quad (8.1)$$

Ďalší postup je už veľmi jednoduchý. Pokiaľ nám to dané dáta umožňujú, budeme sa snažiť "posúvať" každý možný stav do úplnej zmesi. Pokiaľ by to bolo v rozpore s dátami, urobíme takú zmenu operácie na príslušnom stave (z vybraných štyroch bázových stavov, na ktorých budeme rekonštrukciu prevádzkať), aby sme ju čo najmenej upravili. Budeme sa teda snažiť minimalizovať vzdialenosť (na priestore stavov, táto je dobre definovaná) výstupného stavu pre daný vstupný stav od úplnej zmesi. No v prípade, ak nám dáta neumožňujú ani len mapovanie úplnej zmesi na úplnú zmes (teda operácia, napriek našej snahe, nemôže byť unitálna $\varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}] \neq \frac{1}{2}\mathcal{I}$), budeme sa snažiť ostatné bázové stavy posúvať čo najbližšie k miestu, kam je posunutá úplná zmes, teda $\varepsilon[\varrho] = \varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}]$.

Inak povedané, budeme postupne robiť nasledujúce kroky:

1. Odhadneme tie parametre matice, o ktorých máme informácie z dát
2. Ak nemáme úplné informácie o $\varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}]$, budeme sa snažiť operáciu odhadnúť tak, aby sme minimalizovali $D(\varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}], \frac{1}{2}\mathcal{I})$ za zachovania úplnej pozitivity operácie
3. Odhadneme ostatné parametre tak, aby sme minimalizovali $D(\varepsilon[\varrho_j], \varepsilon_{\min}[\frac{1}{2}\mathcal{I}])$ pre všetky stavy ϱ , pre ktoré nevyplýva transformácia z dát, znova za podmienku zachovania úplnej pozitivity operácie.

V ďalšej časti budeme analyzovať jednotlivé príklady pre rôzne počty vstupných stavov. Budeme pritom predpokladať, že vstupné dáta sú korektné, teda umožňujú nájsť aspoň jednu fyzikálnu operáciu, ktorá dáva namerané výsledky (nepredpokladáme teda, že by chyby v experimente mohli spôsobiť to, že dáta sú nefyzikálne).

¹Pod pojmom význačná tu rozumiem unikátnu mieru. Na priestore operácií je pochopiteľne možné zaviesť mieru, ktorá spĺňa všetky rozumné požiadavky. Problémom je, že takýchto mier je možné zaviesť viacej a nedá sa rozhodnúť, ktorú z nich použiť pre ďalší postup.

8.1.1 Žiaden vstupný stav

Tu je situácia úplne jednoduchá, odhadovaná matica má tvar kontrakcie do úplnej zmesi

$$\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.1.2 Jeden vstupný stav

Rozdelíme tento prípad na tri základné možnosti. Buď máme k dispozícii ako vstup úplnú zmes, alebo čistý stav, alebo zmiešaný stav.

Ak máme k dispozícii úplnú zmes, máme informáciu o transformácii

$$\frac{1}{2}\mathcal{I} \rightarrow \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \vec{r}' \cdot \vec{\sigma}). \quad (8.2)$$

Potom náš odhad operácie bude jednoznačne určený

$$\varepsilon[\varrho_x] = \varepsilon[\varrho_y] = \varepsilon[\varrho_z] = \varepsilon\left[\frac{1}{2}\mathcal{I}\right] = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \vec{r}' \cdot \vec{\sigma})$$

a triviálne úplne pozitívny (kontrakcia na konkrétny stav je vždy úplne pozitívna).

Ak máme informáciu o transformácii čistého stavu $|\psi\rangle_z$ (predpokladáme vstupný stav v smere osi z , čo je vždy možné vhodnou voľbou osi; predpokladáme tiež takú voľbu osí na výstupe, aby výstupný stav bol v smere osi z' , teda pracujeme s tzv. adaptabilnou bázou definovanou až na základe vstupných a výstupných stavov):

$$P_z = |\psi\rangle_z \langle \psi| = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \sigma_z) \rightarrow \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \vec{r}' \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + r' \sigma'_z), \quad (8.3)$$

kde $r' = |\vec{r}'|$. Môžeme predpokladať, že mapa ε is unitálna, keďže $D(\varepsilon[P_z], \frac{1}{2}\mathcal{I}) = r' \leq 1 = D(\frac{1}{2}\mathcal{I}, P_z)$. Náš odhad je teda $\varepsilon[\varrho_x] = \varepsilon[\varrho_y] = \varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}] = \frac{1}{2}\mathcal{I}$, to znamená, že obor hodnôt na stavovom priestore je úsečka centrovaná v strede Blochovej sféry s dĺžkou r' . Operácia je triviálne úplne pozitívna (znova, všetky operácie, ktorých obor hodnôt je úsečka, sú úplne pozitívne).

Na záver rozdiskutujeme najzložitejší prípad, keď máme k dispozícii jediný zmiešaný stav, pričom stále pracujeme v adaptabilnej báze:

$$\varrho = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + r S_z) \rightarrow \varrho' = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + r' S'_z).$$

V tomto prípade najskôr musíme zistiť, či je (respektíve môže byť) skúmaná operácia unitálna alebo nie. Z geometrického hľadiska je jasné, že unitálnosť môže byť zachovaná práve vtedy, ak je výsledný stav nie ďalej od úplnej zmesi ako vstupný stav. Tieto vzdialenosti sú

$$D(\varrho, \frac{1}{2}\mathcal{I}) = r; \quad D(\varrho', \frac{1}{2}\mathcal{I}) = r',$$

takže unitarita bude závisieť od znamienka $\Delta = r - r'$. Ak $\Delta \geq 0$ (ϱ je posúvaná bližšie k stredu gule), potom je transformácia unitálna, ak je však $\Delta < 0$ operácia musí hýbať

aj úplnou zmesou. V zmysle našej stratégie teraz ale požadujeme, aby bol tento posun čo najmenší. Je logické, že smer musí byť rovnaký, ako je smer vektora výsledného stavu (teda v našej, adaptabilnej báze v smere osi z), otázna je len jeho veľkosť.

Z požiadavky pozitivity vieme, že stav

$$A = \frac{1}{r}\varepsilon[\varrho] + \left(1 - \frac{1}{r}\right)\varepsilon\left[\frac{1}{2}\mathcal{I}\right] \quad (8.4)$$

musí byť pozitívny, teda musí platiť $A = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \kappa S'_z)$ pre $\kappa \leq 1$. Porovnaním týchto dvoch vyjadrení pre A dostaneme

$$\varepsilon\left[\frac{1}{2}\mathcal{I}\right] = \frac{1}{2} \left(\mathcal{I} + \frac{r' - \kappa r}{1 - r} S'_z \right).$$

Vzdialenosť $D(\varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}], \frac{1}{2}\mathcal{I}) = |(r' - \kappa r)/(1 - r)|$ je najmenšia pre $\kappa = 1$ (za podmienky $\kappa \leq 1$), preto naša rekonštruovaná operácia bude

$$\begin{aligned} \varrho &\rightarrow \varrho'; \\ \varrho_x, \varrho_y, \frac{1}{2}\mathcal{I} &\rightarrow \varepsilon\left[\frac{1}{2}\mathcal{I}\right] = \frac{1}{2} \left(\mathcal{I} + \frac{r' - r}{1 - r} S'_z \right). \end{aligned}$$

Zobrazenie

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r'-r}{1-r} & 0 & 0 & 1 - \frac{r'-r}{1-r} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

spĺňa podmienku úplnej pozitivity, čo sa dá jednoducho overiť jeho rozšírením (o identitu) na dva qubity a aplikáciou na maximálne previazaný stav.

Prípád $r' \leq r$ ($\Delta \geq 0$), ako už bolo spomenuté vyššie, je jednoduchší. Môžeme predpokladať, že rekonštruovaná operácia je unitálna a urobiť odhad

$$\begin{aligned} \varrho &\rightarrow \varrho' \\ \varrho_x, \varrho_y, \frac{1}{2}\mathcal{I} &\rightarrow \varepsilon\left[\frac{1}{2}\mathcal{I}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{I} \end{aligned}$$

a z toho vyplývajúcu maticu

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r'/r \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Rovnako ako predošlé, aj táto matica je triviálne úplne pozitívna. Uvediem len pre doplnenie, že v prípade dotyku podmienok $r' = r$ nadobúda matica (8.5) tvar matice (8.6). Môžem preto zapísať všeobecný výsledok

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \max\left\{\frac{r'-r}{1-r}, 0\right\} & 0 & 0 & \min\left\{\frac{r'}{r}, 1\right\} - \max\left\{\frac{r'-r}{1-r}, 0\right\} \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Adaptabilná báza

Ako bolo spomenuté v texte, naša rekonštrukčná schéma nepracuje vo fixnej báze, ale bázové vektory sa prispôsobujú vstupnému a výstupnému stavu. Matica ε je teda určená až na unitárnu transformáciu spájajúcu dve bázy na vstupe a na výstupe. V prípade len jedného vstupného stavu ale nemáme dostatok informácií ani na to, aby sme spoľahlivo určili tieto rotácie. Na vstupe to však nie je podstatné, osi x a y sa môžu zvoliť ľubovoľne, nakoľko s nimi nikde nepracujeme. Na výstupe je tiež rotácia týchto osí nepodstatná, pretože výsledky sú produkované len na úsečke v smere osi z , rotácia okolo tejto osi preto nemá na konečnú akciu operácie vplyv.

V ďalších častiach, ak máme k dispozícii aspoň dva vstupné stavy (a nie je jeden z nich úplná zmes), získame dostatok informácií na úplné určenie potrebných rotácií a tým pádom aj jednoznačné určenie báz.

Príklady

1. Identita

Predpokladajme, že naša testovacia operácia je identita. Vieme to o nej, ale budeme sa postupne v rôznych príkladoch pozerat', ako naša schéma zrekonštruuje túto operáciu, ktorá je v istom zmysle najviac vzdialená nášmu prvotnému odhadu - kontrakcii do úplnej zmesi.

Táto operácia teda bude pôsobiť podľa pravidla $\varrho \rightarrow \varrho$, teda $r' = r$. Náš odhad bude

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

čo zodpovedá transformácii Blochovej sféry na úsečku spájajúcu dva póly. V tomto prípade je adaptabilná báza rovnaká ako štandardná.

2. Unitárna transformácia

Tento príklad v zásade zodpovedá predchádzajúcemu, jediným rozdielom je potreba určiť adaptabilné bázy. Transformácia sa dá zapísať ako

$$\varrho = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \sigma_z) \rightarrow \varrho' = U\varrho U' = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \sigma'_z).$$

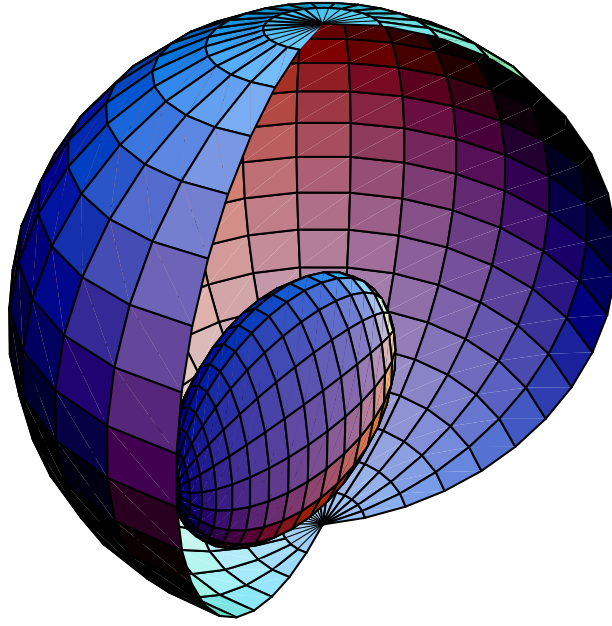
V adaptabilnej báze bude vyzerat' operácia rovnako ako v predchádzajúcom príklade (8.7). Po prepísaní do bežnej báze na výstupe (definícia bázy na vstupe tak, aby vstupujúci vektor bol v zmere osi z , je bežnou definíciou osí a iným vstupným stavom sa preto nebudem zaoberat') sa však zmení na

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x' \\ 0 & 0 & 0 & y' \\ 0 & 0 & 0 & z' \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

3. Kontrakcia na čistý stav

Predpokladajme teda, že akýsi vstupný stav je transformovaný našou operáciou na čistý stav P_ψ :

$$\varrho \rightarrow P_\psi.$$



Obrázok 8.1: Na obrázku je znázornená úplná rekonštrukcia testovacej operácie podľa rovnice (8.9). Mriežka na elipsoide i na sfére znázorňuje rotáciu výsledku oproti vstupu.

Predpokladajme tiež, že vstupný stav ϱ nie je čistý. V tom prípade je naša mapa maximálne neunitálna (úplná zmes je transformovaná na čistý stav) a náš odhad je kontrakcia všetkých stavov do stavu P_ψ

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znamená to, že jediným stavom sme úplne určili transformáciu a žiadne ďalšie výsledky na tejto skutočnosti už nič nemôžu zmeniť.

Iná je situácia, ak je vstupný stav ρ čistý. Potom je výsledkom rovnica (8.8). V tomto prípade je Blochova sféra transformovaná na úsečku spájajúcu stred a povrchy Blochovej sféry.

4. Náhodný výber

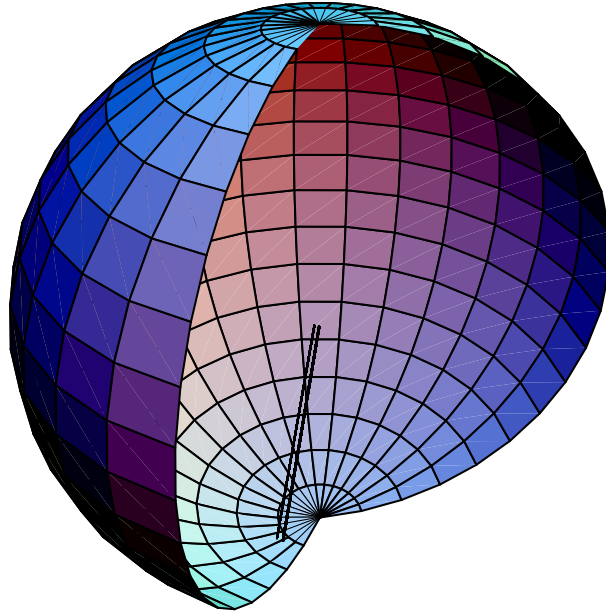
V tomto, poslednom príklade rozoberiem situáciu pre náhodne vybratú operáciu

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

Pôsobenie tejto operácie je znázornené na obrázku 8.1, kde sféra korešponduje množine všetkých vstupných stavov (celý Hilbertov priestor) a elipsoid reprezentuje množinu všetkých výstupných stavov operácie.

Predpokladajme tiež, že z experimentu máme informácie o transformácii stavu $\varrho = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.6\sigma_x)$. Výsledok po aplikovaní (8.9) bude

$$\varrho = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.6\sigma_x) \rightarrow \varrho' = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.62\sigma_x + 0.12\sigma_y).$$



Obrázok 8.2: Transformácia Blochovej sféry pod vplyvom zrekonštruovanej operácie ε_1 danej rovnicou (8.10). Povrch gule je transformovaný do úsečky.

Z nasledujúcej nerovnosti je zjavné, že operácia je silne neunitálna a úplná zmes musí byť posunutá

$$r' = \sqrt{0.62^2 + 0.12^2} > \sqrt{0.6^2} = r.$$

Geometrická príčina je, že stav ϱ' leží ďalej od úplnej zmesi ako stav vstupný ϱ .

V adaptabilne báze má náš stav tvar

$$\varepsilon^{ad} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.079 & 0.921 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a po prechode do bežnej bázy je náš odhad

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0776 & 0.904 & 0 & 0 \\ 0.015 & 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

8.1.3 Dva vstupné stavy

Predpokladajme teraz, že z experimentu máme k dispozícii informácie o transformácii dvoch vstupných stavov. Aká bude naša najlepšia rekonštrukcia operácie?

Znalosťou transformácie dvoch vstupných stavov vieme zistiť o operácii ε šesť vstupných parametrov, teda presnú polovicu potrebných parametrov jednoznačne určujúcich operáciu. Druhá polovica parametrov musí byť odhadnutá tak, aby výsledok čo najlepšie vyhovoval

naším požiadavkám o čo najkonzervatívnejší odhad. Budeme preto postupovať podľa stratégie popísanej vyššie.

Transformácie stavov sú dané predpismi:

$$\varrho_1 \rightarrow \varrho'_1, \quad \text{a} \quad \varrho_2 \rightarrow \varrho'_2.$$

Máme informáciu o tom, ako sa transformuje dvojrozmerný podpriestor $S(H)$ alebo, inak povedané, vieme predpis pre transformáciu jednej úsečky na Blochovej sfére. Predstavme si najskôr, že táto úsečka prechádza stredom Blochovej sféry (tj. lineárnou kombináciou stavov ϱ_1 a ϱ_2 sa dá získať identita $\xi_0 = \frac{1}{2}\mathcal{I}$). Vieme teda získať úplnú informáciu o tom, ako sa transformuje identita. V tom prípade dokážeme lineárnou kombináciou získať zo vstupných stavov aj čistý stav a môžeme napísať

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{2}\mathcal{I} \rightarrow \varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}] = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \beta \sin \theta \sigma'_x + \beta \cos \theta \sigma'_y); \\ \xi_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \sigma_x) \rightarrow \varepsilon[\xi_1] = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \alpha \sigma'_x); \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \sigma_y) \rightarrow \varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}] = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \beta \sin \theta \sigma'_x + \beta \cos \theta \sigma'_y); \\ \xi_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \sigma_z) \rightarrow \varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}] = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \beta \sin \theta \sigma'_x + \beta \cos \theta \sigma'_y), \end{aligned}$$

a matica operácie ε má tvar

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta \sin \theta & \alpha - \beta \sin \theta & 0 & 0 \\ \beta \cos \theta & -\beta \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

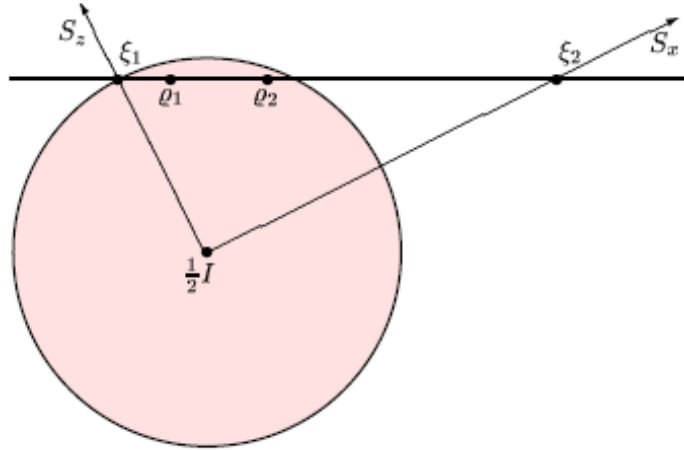
Aj v tomto prípade, rovnako ako vo všeobecnom prípade jedného vstupného stavu má obor hodnôt operácie tvar úsečky vnútri Blochovej sféry (obr. 8.2). Operácia je úplne pozitívna vtedy a len vtedy, ak $\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta \sin \theta \leq 1$. Túto skutočnosť však nemôžeme ovplyvniť našou rekonštrukciou, v prípade nesplnenia podmienky sme dostali nekorektné dáta (dáta, ktoré nemohli vzniknúť z korektného fyzikálneho experimentu). Riešením tohoto problému sa budem zaoberať v ďalšej časti práce.

V prípade, ak lineárnou kombináciou vstupných stavov nie je možné získať identitu, postup je o čosi zložitejší. Môžeme definovať dva nové operátory (lineárne kombinácie stavov ϱ_1 a ϱ_2), ktoré budú mať lepšie vlastnosti vzhľadom na naše potreby. Tieto operátory (obsahujúce rovnaké informácie o transformácii ako pôvodné stavy), ktoré sú definované transformáciami

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \sigma_x) \rightarrow \xi'_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \alpha \sigma'_x); \quad (8.11)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + b\sigma_y) \rightarrow \xi'_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \beta \sin \theta \sigma'_x + \beta \cos \theta \sigma'_y), \quad (8.12)$$

majú jednotkovú stopu a spĺňajú všetky nutné podmienky na fyzikálny stav okrem pozitívnosti. Znamená to, že v prípade potreby volíme jeden zo stavov aj z oblasti mimo Blochovej sféry. Rovnica (8.11) definuje transformáciu čistého stavu (z ľubovoľných dvoch stavov viem lineárnou kombináciou získať čistý stav na vstupe, pozri obrázok 8.3) na vo všeobecnosti



Obrázok 8.3: Obrázok znázorňuje spôsob, akým je možné získať z dvoch ľubovoľných stavov ρ_1 a ρ_2 jedného čistého stavu ξ_1 a ďalšieho operátora hustoty ξ_2 , ktorý však vo všeobecnosti nie je stavom. Tak je tomu aj v tomto obrázku, kde ξ_2 je mimo oblasti ohraničenej Blochovou sférou.

zmiešaný stav na výstupe. Rovnica (8.12) definuje zasa transformáciu kolmého operátora (vždy viem vybrať k stavu ξ_1 kolmý operátor², nebude však vždy pozitívny, nemusí to byť preto stav, pozri obrázok 8.3) na všeobecný operátor na výstupe. Platí teda podmienka $\alpha \leq 1$, vo všeobecnosti však nie $b \leq 1$.

Ako ansatz zvolíme maticu

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & \alpha - x & (\beta \sin \theta - x)/b & m \\ y & -y & (\beta \cos \theta - y)/b & n \\ z & -z & -z/b & k \end{pmatrix}$$

so šiestimi voľnými parametrami x, y, z, m, n, k . Naša snaha bude minimalizovať posun úplnej zmesi (teda veľkosť hodnoty $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) a potom, v druhom slede, minimalizovať aj posun tretieho, neznámeho vektora od miesta, kam bola transformovaná úplná zmes (teda zvolit' parametre m, n a k tak, aby sme minimalizovali $D(\varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}], \varepsilon[\varrho_z]) = \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}$). V princípe je možné túto úlohu vykonať numericky v prípade, ak máme k dispozícii potrebné hodnoty parametrov b, α, β, θ . Keďže $\varrho_z = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \sigma'_z)$, σ'_z je jednoznačne daná, ak máme k dispozícii informácie o σ'_x, σ'_y .

Uvážme najskôr prípad, kedy môžeme zvolit' unitálnu operáciu, teda $\mathcal{E}[\frac{1}{2}\mathcal{I}] = \mathcal{I}$. Vtedy má transformácia tvar ε

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \sin \theta / b & m \\ 0 & 0 & \beta \cos \theta / b & n \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Budeme teraz skúmať podmienky úplnej pozitivity operácie. Z podmienky samotnej pozitivity

²V zavedenom formalizme sú dva operátory navzájom kolmé, ak ich skalárny súčin získaný ako skalárny súčin dvoch stĺpcových vektorov je rovný jednej.

máme

$$\alpha \leq 1, \quad \beta/b \leq 1$$

a tiež

$$\sqrt{m^2 + n^2 + k^2} \leq 1, \quad (8.13)$$

keďže $\varepsilon[\rho_z]$ musí byť fyzikálny stav. Pre ďalší postup prijmime hypotézu, že $m = n = 0$. Aplikovaním operácie $\varepsilon \otimes I$ na maximálne previazaný stav dvoch qubitov P_+ musíme dostať fyzikálny stav (ako bolo vysvetlené vyššie, toto je postačujúca (aj nutná) podmienka na zaručenie úplnej pozitivity). V našom prípade najmenšie dve vlastné hodnoty výsledného operátora sú

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4} \left(1 \pm k - \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 \pm 2\alpha\frac{\beta}{b} \cos(\theta)} \right).$$

Z nich môžeme odvodiť dve podmienky na ich nezápornosť

$$1 + k \geq \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 + 2\alpha\frac{\beta}{b} \cos(\theta)}; \quad (8.14)$$

$$1 - k \geq \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 - 2\alpha\frac{\beta}{b} \cos(\theta)}. \quad (8.15)$$

Ak sčítame (8.14) a (8.15), eliminujeme neznámu k a dostaneme podmienku pre vstupné parametre α, β, b a θ

$$\left(\frac{\beta}{b}\right)^2 \leq \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2 \cos^2(\theta)}. \quad (8.16)$$

Pravá strana nerovnice (8.16) menšia alebo rovná jednej (rovnosť platí len v prípade, ak je zachovaná kolmost' vstupných stavov). Toto je v súlade s podmienkou $\beta \leq b$. Preto môžeme vyhlásiť, že (8.16) reprezentuje silnejšiu podmienku ako doteraz známe pre úplnú pozitivitu operácie.

Keďže čistý stav ρ_z je transformovaný na stav $\rho'_z = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + k\sigma'_z)$, hodnota parametra k musí spĺňať $k \leq 1$. Za podmienky (8.16) môžeme túto hodnotu zvoliť

$$k = \alpha \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2 \cos^2 \theta}} \cos \theta \leq 1. \quad (8.17)$$

Táto hodnota spĺňa obe pôvodné podmienky (8.14) a (8.15). Z toho vyplýva, že (8.16) zaručuje úplnú pozitivitu operácie.

Teraz, v druhom kroku, musíme nájsť minimálne k pre udržanie tejto podmienky. Vo všeobecnosti bude menšie ako hodnota daná rovnicou (8.17) a bude mať hodnotu

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 + 2\alpha\frac{\beta}{b} \cos(\theta)} - 1. \quad (8.18)$$

Ešte zostala nezodpovedaná otázka, či by sa nedal dosiahnuť lepší výsledok v prípade, ak by sme upustili od požiadavky $m = n = 0$. V prípade, ak je splnená podmienka (8.16), takýto postup k lepším výsledkom nevedie. Ak však táto podmienka splnená nie je, overili sme

vhodnosť voľby tretieho vektora ako kolmého na výstupné dva vektory len numerickou cestou. Zo všetkých skúmaných príkladov ale jednoznačne vyplynulo, že takáto voľba bola najlepšia. Môžem preto vysloviť domnienku, že požiadavka $m = n = 0$ je legitímna a najlepšie výsledky sa dosahujú pri jej splnení, neviem však toto tvrdenie dokázať.

Rozoberme teraz najzložitejšiu situáciu, teda ak platí $\varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}] \neq \frac{1}{2}\mathcal{I}$. Ako sme spomenuli vyššie, v tomto prípade musíme vo všeobecnosti optimalizovať až cez šesť neznámych parametrov. Toto je však možné urobiť iba numericky, preto sme nútení prijať niektoré ďalšie obmedzenia.

- V predchádzajúcej sekcii sme ukázali, že v prípade jedného vstupného stavu sa úplná zmes posúva (ak sa tomu nedá vyhnúť) v smere výstupného stavu. Budeme preto aj tu predpokladať, že úplná zmes sa posúva len v rovine danej dvoma výstupnými stavmi, nie v rovine kolmej.
- V predchádzajúcom prípade sa ukázalo ako veľmi výhodné posúvať tretí vektor len po kolmici k rovine danej dvoma výstupnými vektormi. Využijeme tento fakt aj v tomto prípade.

Ak teda zvolíme $m = n = z = 0$, náš odhad bude mať tvar

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & \alpha - x & (\beta \sin \theta - x)/b & 0 \\ y & -y & (\beta \cos \theta - y)/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Na takejto matici je numerické hľadanie oveľa jednoduchšie a rýchlejšie a dáva vo všetkých numericky skúmaných prípadoch rovnaké výsledky ako prehladávanie všetkých parametrov.

Príklady

1. Identita

Predpokladajme vstupné a výstupné stavy vo forme $\varrho_z \rightarrow \varrho_z = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + S_x)$ a $\xi_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + bS_y) \rightarrow \frac{1}{2}(\mathcal{I} + bS_y)$. V tomto prípade bude mať náš odhad tvar

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Je jednoduché preskúmať, že jediná úplne pozitívna voľba je $k = 1$. V tomto prípade sme teda už so znalosťou dvoch stavov úplne rekonštruovali operáciu.

Situácia sa mení, ak máme na vstupe (priamo, alebo ako lineárnu kombináciu vstupov) úplnú zmes, teda $\varepsilon[\frac{1}{2}\mathcal{I}] = \frac{1}{2}\mathcal{I}$. V tom prípade je náš výsledok

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

celý priestor stavov je transformovaný na úsečku.

2. Unitárna transformácia

Situácia je rovnaká ako v predchádzajúcom prípade. Máme inforácie $\varrho_x \rightarrow \varrho'_x = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + S'_x)$ a $\xi_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + bS_y) \rightarrow \frac{1}{2}(\mathcal{I} + bS'_y)$. Odhadom $\frac{1}{2}\mathcal{I} \rightarrow \frac{1}{2}\mathcal{I}$ dostaneme $\sigma_x \rightarrow \sigma'_x, \sigma_y \rightarrow \sigma'_y$. Máme teda všetky informácie potrebné na úplné odhalenie operácie. Rovnako v prípade, ak je na vstupe úplná zmes, sa situácia redukuje na transformáciu na úsečku (príslušne zrotovanú).

3. Kontrakcia na čistý stav

V tomto prípade dostaneme za každých okolností úplnú informáciu o operácii. Oba vstupné stavy, nech sú akékoľvek, sa transformujú na definovaný čistý stav a jediným riešením pre takéto dáta je kontrakcia všetkých vstupných stavov na jediný čistý stav.

4. Náhodný výber

Predpokladajme vstupné stavy

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.6\sigma_x); \\ \varrho_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.4\sigma_x + 0.1\sigma_y + 0.8\sigma_z)\end{aligned}$$

a výstupy podľa matice (8.9). Podľa navrhovaného postupu najskôr skonštruujeme operátory ξ_1, ξ_2 ako lineárne kombinácie ϱ_1, ϱ_2 , pričom prvý z nich bude čistý stav a budú na seba kolmé. Jedna z dvoch možností voľby je

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.76095\sigma_x - 0.080475\sigma_y - 0.6438\sigma_z); \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.464776\sigma_x + 0.0676122\sigma_y + 0.540897\sigma_z).\end{aligned}\tag{8.19}$$

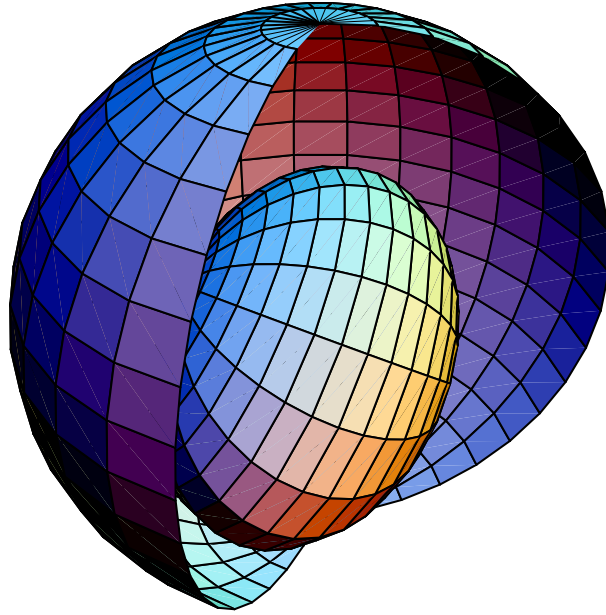
Tu práve nastal prípad, keď je operátor ξ_2 negatívny, teda to nie je fyzikálny stav. Výstupy z operácie potom budú

$$\begin{aligned}\xi'_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.595857\sigma_x + 0.34533\sigma_y - 0.217283\sigma_z); \\ \xi'_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.6402284\sigma_x - 0.0693141\sigma_y + 0.182553\sigma_z),\end{aligned}\tag{8.20}$$

a z nich parametre operácie

$$\begin{aligned}b &= \|\vec{\xi}_2\| = 0.71635; \\ \alpha &= \|\vec{\xi}'_1\| = 0.722157; \\ \beta &= \|\vec{\xi}'_2\| = 0.669398; \\ \theta &= \arcsin\left(\frac{1}{\alpha\beta}\xi'_1 \cdot \xi'_2\right) = 0.717699 \text{ rad},\end{aligned}\tag{8.21}$$

pri použití označení $\xi_j = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \vec{\xi}_j \cdot \vec{\sigma})$. Vyššie uvedené vyjadrenia vychádzajú z rovníc pre



Obrázok 8.4: Tento obrázok znázorňuje obor hodnôt zrekonštruovanej operácie ε_2 , teda rekonštrukcie nášho náhodného príkladu pre dva vstupné stavy.

$\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2$ v (8.19) a (8.20):

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \sigma_x); \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + b\sigma_y); \\ \xi'_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \alpha\sigma'_x); \\ \xi'_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \beta \sin \theta \sigma'_x + \beta \cos \theta \sigma'_y).\end{aligned}$$

Tieto rovnice nám pomôžu aj pri prechode z adaptabilnej do normálnej bázy.

Z vypočítaných parametrov (8.21) vyplýva, že musíme hľadať medzi neunitárnymi operáciami. Výsledok numeriky v adaptabilnej báze je

$$\varepsilon^{ad} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.101568 & 0.620589 & 0.472761 & 0 \\ 0.0600669 & -0.0600669 & 0.620094 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.457 \end{pmatrix}.$$

Po prechode do normálnej bázy dostávame výsledok (pozri tiež obrázok 8.4):

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1168 & 0.83866 & -0.03137 & 0.25083 \\ 0.01523 & 0.1746 & 0.26946 & -0.34023 \\ 0.00696 & -0.0116 & 0.36878 & 0.28862 \end{pmatrix}.$$

8.1.4 Tri vstupné stavy

Aj pri troch vstupných stavoch musíme rozdeliť situáciu na dva možné prípady. Buď sa dá zo vstupov nakombinovať úplná zmes, alebo nie. Ak je to možné, zvolíme nasledovné lineárne kombinácie vstupov

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \frac{1}{2}\mathcal{I} \rightarrow \xi'_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + xS'_x + yS'_y); \\ \xi_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + S_x) \rightarrow \xi'_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \alpha S'_x); \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + S_y) \rightarrow \xi'_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \beta \sin \theta S'_x + \beta \cos \theta S'_y).\end{aligned}$$

Teraz musíme nájsť také m, n a k , že vzdialenosť $D(\xi'_0, \xi'_3)$ je minimálna za podmienky

$$\xi_3 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + S_z) \rightarrow \xi'_3 = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + mS'_x + nS'_y + kS'_z).$$

Pochopiteľne, stále platí aj podmienka na úplnú pozitivitu hľadanej operácie. Situácia je veľmi podobná tej z minulej sekcie (dva vstupné stavy), máme k dispozícii tri vstupné parametre a numericky nájdeme výsledok.

V prípade, ak nemáme informácie o transformácii úplnej zmesi, musíme urobiť odhad jej polohy po akcii operácie. Tri voľné parametre teraz budú predstavovať práve polohu identity a znova, rovnako ako v predošlom prípade, použijeme numerické hľadanie.

Príklady

1. Identita

V tomto prípade sa pri ľubovoľnej kombinácii vstupných stavov získa hľadaná operácia.

2. Unitárna transformácia

Tento prípad je rovnaký ako predošlý, vždy získame úplnú rekonštrukciu.

3. Kontrakcia na čistý stav

Tento problém je vyriešený už pre dva vstupné stavy, takže tretí nám len musí potvrdiť informácie už raz získané

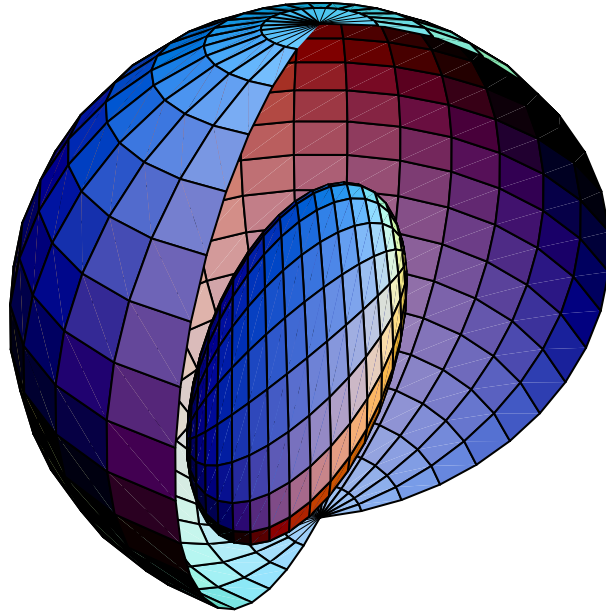
4. Náhodný výber

Predpokladajme znalosť týchto troch stavov

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.6\sigma_x) \\ \varrho_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.4\sigma_x + 0.1\sigma_y + 0.8\sigma_z) \\ \varrho_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{I} + 0.4\sigma_x + 0.3\sigma_y + 0.6\sigma_z).\end{aligned}$$

Numericky nájdeme tri neznáme parametre matice a dostávame výsledok (pozri aj obrázok 8.5)

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.294686 & 0.54219 & -0.02396 & 0.176042 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.3 \\ 0.0562144 & -0.0936907 & 0.27918 & 0.27918 \end{pmatrix}. \quad (8.22)$$



Obrázok 8.5: Obrázok oboru hodnôt zrekonštruovanej operácie ε_3 danej rovnicou (8.22).

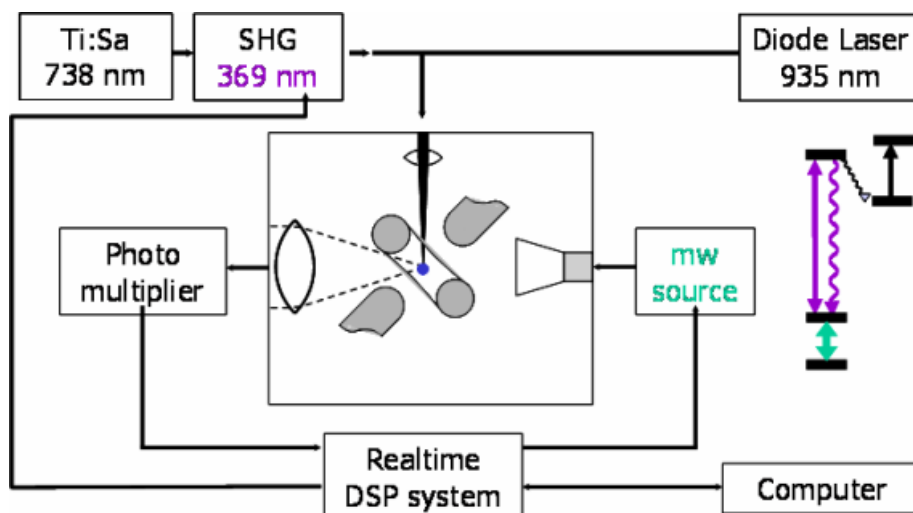
8.2 Nekonzistenstné dáta

Ako sme niekoľkokrát spomínali v kapitole o odhadoch v kvantovej mechanike, rovnako ako v predchádzajúcej sekcii, pri postupných rekonštrukciách stavov i operácií založených na stredných hodnotách nameraných parametrov sme vždy vystavení riziku, že dáta dodané experimentátormi budú fyzikálne nekonzistentné. V našom konkrétnom prípade kvantových operácií to môže znamenať (odhliadnuc od možného faktu, že samotné vstupné alebo výstupné stavy nebudú fyzikálnymi stavmi), že ľubovoľná možná zrekonštruovaná operácia nebude úplne pozitívna, či dokonca ani len pozitívna.

V takomto prípade je zrejmé, že prišlo k chybe v experimente, k nesprávnemu vyhodnocovaniu dát, alebo (čo je vec, ktorej sa nijako nedá zabrániť) prišlo k štatisticky prípustnej odchýlke danej konečným počtom meraní, ktorá nás však *vyniesla* z fyzikálneho priestoru von. Jednou z možností v prípade úplných alebo čiastočných rekonštrukcií je úplne dané dáta odmietnuť a nezaoberať sa nimi. Ak však pripustíme, že napriek chybám tieto dáta obsahujú isté relevantné informácie, môžeme sa ich pokúsiť do istej miery "opraviť" - regularizovať.

Bude dobré pripomenúť postup, ktorý sa aplikuje v prípade rekonštrukcie stavov. Tam nepožadujeme úplnú pozitivitu operátora, len pozitivitu. To sa v priestore jedného qubitu prejavuje tým, že žiadame aby bol stav umiestnený vo vnútri alebo na povrchu Blochovej sféry. Pri odhade sa nám však môže stať, že stav "vyjde" až za touto hranicou. Vtedy zachováme pôvodný smer stavu, vektora, ale posunieme ho smerom k stredu sféry (úplnej zmesi) tak, aby sa z neho stal fyzikálny (a v tomto prípade čistý) stav. Tento postup sa dá interpretovať aj tak, že k zrekonštruovanému operátoru "pridáme" najmenšie potrebné množstvo úplnej zmesi (šumu) tak, aby sa z neho stal fyzikálny stav. Matematicky tento postup môžeme zapísať ako

$$\rho' = \min_t \left(t \frac{1}{2} I + (1-t)\rho \right). \quad (8.23)$$



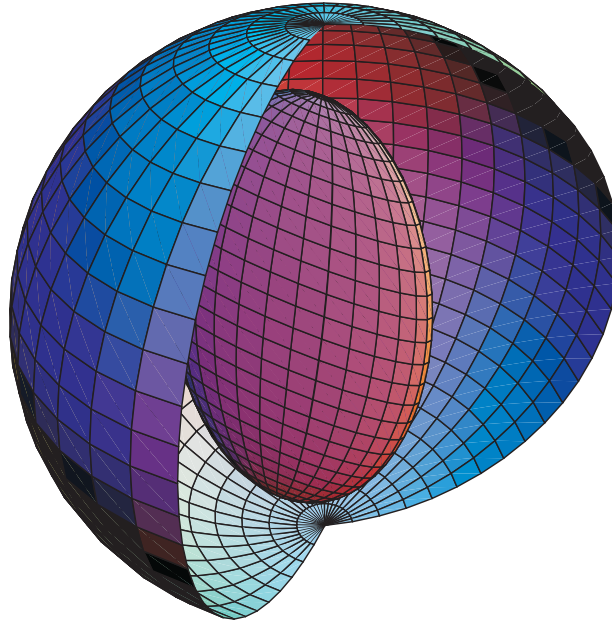
Obrázok 8.6: Na schéme je znázornený postup experimentu pri uchovávaní lapených iónov v pasciach a ich sledovaní. V hornej časti sú znázornené lasery zabezpečujúce detekciu iónov, mw-source predstavuje mikrovlnný zdroj, Photo-multiplier zabezpečuje detekciu vyžiareného svetla. V pravej stradnej časti je schéma predstavujúca možné prechody medzi stavmi iónu, pričom farba prechodov korešponduje zvolenej farbe zdroja (laser, mikrovlna).

Pochopiteľne, toto vyjadrenie je zbytočne zložitá (parameter t sa dá presne vyrátať a nadobúda hodnotu $1 - \frac{1}{\|\rho\|}$, kde $\|\rho\|$ je dĺžka vektora zrekonštruovaného stavu znázorneného na Blochovej sfére), ale je dobrým návodom na postup pri operáciách.

Predstavme si teraz prípad úplnej rekonštrukcie, keď nás experimentálne dáta vedú k operácii, ktorá nie je pozitívna alebo úplne pozitívna. Ako dobrý príklad nám budú slúžiť reálne dáta namerané skupinou Ch. Wunderlicha, analyzované na našom pracovisku.

V tomto experimente boli vykonávané rôzne druhy operácií na qubitoch, ktoré boli zakódované v stavoch iónov lapených v pasciach. Schématický obrázok experimentu je uvedený na obrázku (8.6). Pri jednom z experimentov bola originálne určená operácia v tvare podľa obrázku (8.7). Bohužiaľ však táto operácia nie je úplne pozitívna (samotná pozitivita je zaručená už spôsobom experimentu, lebo predpokladáme čisté vstupné stavy a na výstupe tiež požadujeme rekonštrukciu stavov), preto musíme navrhnúť procedúru, ako ju regularizovať.

Logickým postupom by bolo aplikovať rovnakú metódu ako pri rekonštrukcii stavov. Teda, pridávať k operátoru také množstvo šumu, až sa tento stane pozitívnym. V našom prípade je pochopiteľná voľba šumu, ktorý budeme pridávať: kontrakcia do úplnej zmesi. Osvedčila sa v prípade neúplných rekonštrukcií a dá sa, pri istom uhle pohľadu, pokladať za objekt z centra priestoru všetkých operácií. V maticovom vyjadrení to neznamená nič iné ako násobenie všetkých elementov skúmanej matice (okrem jedničky v ľavom hornom rohu, ktorá zabezpečuje zachovanie normy operátorov pred a po operácii a je to jediný nenulový element matice operátora kontrakcie do úplnej zmesi) číslom menším ako jedna. Pre náš príklad bude



Obrázok 8.7: Obor hodnôt originálne zrekonštruovanej operácie z experimentálnych dát skupiny Ch. Wunderlicha, ktorá však nespĺňa podmienku úplnej pozitivity.

všeobecná jednoparametrická grupa takých operácií mat' tvar

$$\varepsilon(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.064515k & 0.086015k & -0.010755k & -0.075265k \\ -0.07527k & 0.10753k & 0.43011k & 0.06451k \\ 0.026875k & -0.037625k & -0.102145k & 0.758065k \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

Zostáva ešte určiť, ktoré k si vyberieme. Hraničné hodnoty sú 1 (v tom prípade sa jedná o originálnu rekonštrukciu, o ktorej vieme, že nespĺňa fyzikálne požiadavky) a 0 (tu sa jedná o kontrakciu do úplnej zmesi, kde stratíme všetky informácie o pôvodnej operácii). Logicky máme snahu zachovať čo najviac pôvodnej informácie. Výslednú operáciu preto definujeme tak, aby

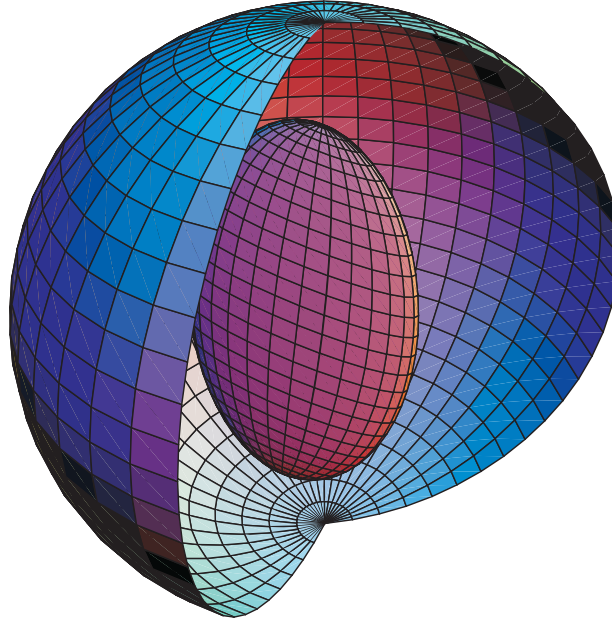
$$k = \max_{k \in \langle 0,1 \rangle} [\varepsilon(k) \in CP], \quad (8.25)$$

kde CP je priestor úplne pozitívnych máp (Completely positive). Máme zaručené, že vždy aspoň jedno takéto k existuje, pretože $\varepsilon(0)$ je zaručene dobrá mapa. Navyše je pravda, že vždy existuje aj nenulové δ , pre ktoré $\varepsilon(\delta)$ je úplne pozitívna mapa (vyplýva to z faktu, že podmienku úplnej pozitivity v okolí $k = 0$ môžeme rozvinúť do radu a odhadnúť prvý člen), preto náš odhad bude vždy niest' istú informáciu o pôvodnej operácii.

Ďalší postup preto je: vyjadriť podmienku úplnej pozitivity pomocou k a nájsť najväčšie k , ktoré tejto podmienke ešte vyhovuje. V našom prípade je táto hodnota

$$k = 0.877307, \quad (8.26)$$

ktorá zaručuje úplnú pozitivitu. Obor hodnôt operácie sa potom príslušne zmenší (efekt tejto úpravy je v skutočnosti rovnaký ako výsledné prenasobenie každého stavu konštantou k), pozri obrázok (8.8).



Obrázok 8.8: Obor hodnôt upravenej zrekonštruovanej mapy. Ako je zrejmé z porovnania s predchádzajúcim obrázkom, prišlo len k zmršteniu elipsoidu a jeho posunu smerom ku stredu sféry, tvar aj orientácia zostali zachované.

Veľmi zaujímavou aplikáciou tohoto postupu, ktorý je len odhadom vonkoncom nezaručujúcim najlepší výsledok, je pokus o použitie na silne nefyzikálnu operáciu úplnej inverzie stavu, tzv. Universal NOT. Pre túto operáciu platí, že každý čistý stav preklápa na jeho kolmý, teda $|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle^\perp$, $\langle\psi|\psi\rangle^\perp = 0$ a má tvar

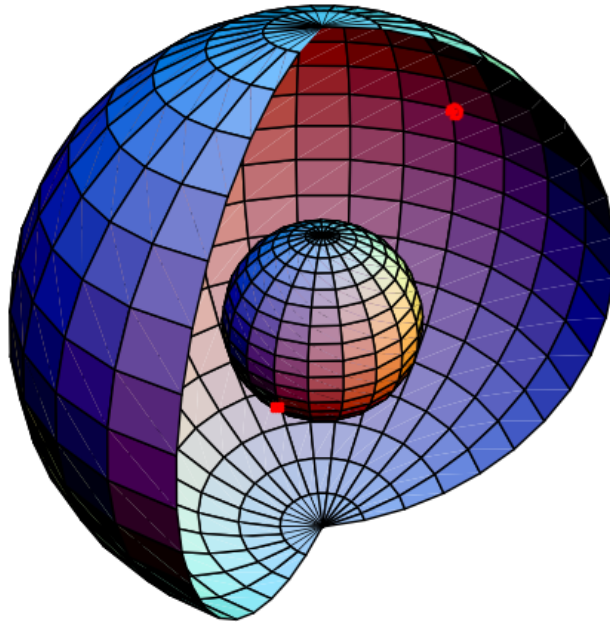
$$\varepsilon_{UNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.27)$$

Oborom hodnôt tejto operácie sú všetky možné stavy, takže nemá zmysel kresliť pre ňu obrázok.

Je tiež veľmi dobre známe [42], že táto operácia nie je úplne pozitívna a najbližšia možná fyzikálna operácia k nej je takzvaný Optimal Universal NOT (pozri obrázok 8.9):

$$\varepsilon_{OUNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (8.28)$$

Pomocou našej metódy dostaneme rovnaký výsledok. Ak aplikujeme na pôvodnú operáciu ε_{UNOT} násobenie konštantou k a spočítame jej maximálnu veľkosť, vyjde práve hľadaná hodnota $k = \frac{1}{3}$ a výsledná operácia v tvare ε_{OUNOT} . Takéto dobré výsledky však (ako ukážem aj v nasledujúcej sekcii) nemusia byť pravidlom. Tu sme výrazne využili, že sa jedná o veľmi symetrickú operáciu a jednoduchou úvahou sa dalo prísť k faktu, že riešenie musí byť napísateľné



Obrázok 8.9: Obor hodnôt operácie Optimal universal NOT - najbližšej fyzikálnej operácie k U-NOT, úplnému preklopeniu stavu. Červenými bodkami sú označené náhodne vybraný vstupný stav (na povrchu veľkej sféry) a jemu zodpovedajúci výstupný stav (na povrchu malej sféry).

práve v takej forme jednoparametrického systému, aký používame. Napriek tomu je násobenie konštantou účinný a veľmi jednoduchý spôsob, ako sa vysporiadať s nefyzikálnymi vstupmi do úplných alebo čiastočných rekonštrukcií.

8.3 Maximum likelyhood

Použitie metódy maximálnej pravdepodobnosti je zrejme z teoretického pohľadu najjednoduchšie a najsprávnejšie riešenie. Je to priama cesta od "surových" dát prichádzajúcich z experimentu k výsledkom bez zjednodušenia, medzikrokov a zanedbaní. Vzhľadom na to, že pracujeme s binárnymi údajmi z meraní (tzv. klikmi), niekedy sa podobné postupy označujú aj slovom *klikológia*[46].

Metóda má však, ako bolo spomínané v piatej kapitole, aj svoje nevýhody - vyžaduje si značnú numerickú silu, je aplikovateľná len na tie najjednoduchšie systémy a veľmi ťažko sa overuje spoľahlivosť a správnosť získaného výsledku. V tejto sekcii popíšem dve využitia Maximum Likelyhood (ML) metódy, jednak na analýzu už spomínaných dát od skupiny Ch. Wunderlicha a tiež na simuláciu nefyzikálnych operácií a získavanie ich priblížení.

8.3.1 Numerický postup

Ako bolo popísané v kapitole o odhadoch v kvantovej mechanike, postup metódy je veľmi jednoduchý: zdefinujeme si všeobecnú formu hľadaného objektu s vhodnými parametrami, definujeme funkciu celkovej pravdepodobnosti (5.6) a hľadáme jej maximum cez všetky para-

metre. V našom prípade použijeme definíciu operácie (5.17)

$$\varepsilon_{ML} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

a vstupné stavy a smery merania na výstupe parametricujeme podľa (5.8)

$$\rho_i^{in,out} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_i^{in,out} \\ y_i^{in,out} \\ z_i^{in,out} \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

za podmienky $\|x_i^{out} + y_i^{out} + z_i^{out}\| = 1$. Tento spôsob zápisu nám automaticky zabezpečí zachovanie stopy stavu (budeme však musieť zvlášť kontrolovať úplnú pozitivitu), čím sa postup líši od už realizovaných pokusov využitia ML metódy na rekonštrukciu kvantových operácií [43, 44, 45]. Využijeme tiež možnosť pracovať s logaritmom výstupnej funkcie celkovej pravdepodobnosti, čo zjednoduší numerickú náročnosť a zlepši spoľahlivosť získaných výsledkov.

Vstupom do programu bude teda sada vstupných stavov, smerov meracieho aparátu na výstupe a namerané hodnoty $p_i \in \{0, 1\}$ (teda či daný výsledok, tzv. klik, bol v smere alebo proti smeru orientácie prístroja). Výstupom by mala byť priamo sada dvanástich parametrov, určujúcich operáciu.

Na samotný proces minimalizácie použijeme Nelder-Mead simplex algoritmus implementovaný v prostredí programu Mathematica 5.0. Budeme numericky maximalizovať funkciu

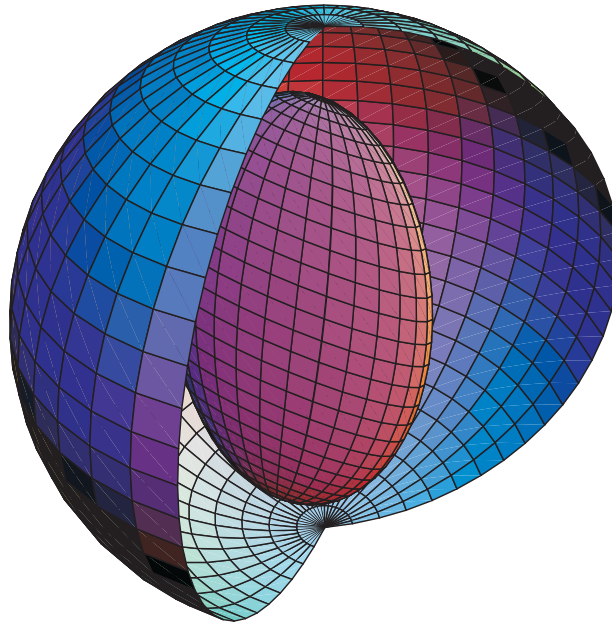
$$F = \sum_i \log [\rho_i^{in} \bullet \varepsilon_{ML} \bullet \rho_i^{out} \cdot p_i + (2 - \rho_i^{in} \bullet \varepsilon_{ML} \bullet \rho_i^{out}) (1 - p_i)] \quad (8.31)$$

za okrajových podmienok na parametre a_i, b_i a c_i zaručujúce pozitivitu a úplnú pozitivitu. Zatiaľ čo samotná pozitivita je zaručená numericky jednoduchými konvexnými podmienkami, podmienka úplnej pozitivity má oveľa komplikovanejšiu podobu a čo je najpodstatnejšie, vymedzuje parametricky veľmi zložitý priestor. Tento fakt značne sťažuje samotné numerické spracovanie problému.

Na zabezpečenie spoľahlivosti výsledku bol minimalizačný algoritmus opakovane spúšťaný pre rovnaké vstupné dáta s rôznym štartom náhodného generátora. Zároveň som ladil rôzne parametre minimalizácie tak, aby som dosiahol maximálnu stabilizáciu výsledku. Navyše pre testovacie prípady som mal k dispozícii aj originálnu operáciu, z ktorej boli produkované kvázi-experimentálne dáta a výsledok som porovnával aj s touto operáciou.

Ukázalo sa, že na spoľahlivú funkciu minimalizácie je nutné nastaviť parametre tak, aby okrajové podmienky boli relatívne priepustné (bol umožnený prechod cez oblasť bez splnenia podmienky úplnej pozitivity) a tiež muselo byť chladenie systému značne pomalé (vysoký koeficient odrazu). V zásade bolo vhodné použiť také nastavenie, ktoré autori programu odporúčajú pre problémy s množstvom hlbokých miním, ktoré sa od seba len minimálne líšia.

Pri testovaní som skúšal aj iné spôsoby, konkrétne simulované žihanie a náhodné vyhľadávanie, avšak výsledky neboli zďaleka natoľko stabilné. Limitujúcim faktorom totiž nebol výpočtový čas (aj najzložitejšie prípady boli riešiteľné v časovej škále jednotiek hodín na



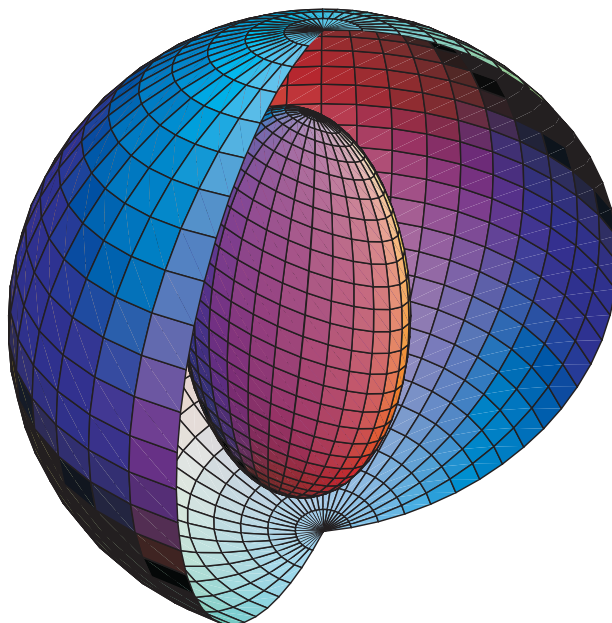
Obrázok 8.10: Úplná rekonštrukcia operácie nespĺňajúcej podmienku úplnej pozitivity.

výkonnom prenosnom počítači), ale pamäť. Pri všeobecnej voľbe vstupných stavov aj orientácie meracieho prístroja narastá komplexnosť funkcie lineárne s počtom dát. Pri 512 MB operačnej pamäti je limitujúci počet bodov okolo 1800, čo zodpovedá (pri štyroch rôznych vstupných stavoch a troch priemetoch spinu na stav) cca 130 meraniam na zložku spinu. Toto je rozumný spodný odhad na spoľahlivé určenie operácie.

Pri reálnych experimentoch však najčastejšie používame ako vstupné stavy čisté stavy z obmedzenej množiny (najčastejšie 6 rôznych čistých stavov reprezentujúcich vždy dva možné výsledky meraní priemetov spinu na tri rôzne osi) a na výstupe tiež len meracie prístroje orientované v troch kolmých smeroch. Preto som pri produkcii testovacích dát používal dva základné postupy - buď náhodná generácia čistého vstupného stavu a náhodné meranie, alebo náhodný výber zo šiestich možných vstupných stavov a náhodný výber z troch orientácií meracieho prístroja. Druhá metóda bola z každého ohľadu lepšia - postup minimalizácie bol časovo menej náročný, dalo sa spracovať väčšie množstvo experimentálnych dát a porovnanie výsledkov oboch metód tiež ukazovalo lepšiu konvergenciu (ak som generoval zo známej operácie testovacie dáta, pri rovnakom počte dát som druhým spôsobom lepšie zrekonštruoval pôvodnú operáciu).

8.3.2 Experimentálne dáta

Na jednom príklade ukážem analýzu experimentálnych dát. Vrátim sa k problému z minulej sekcie, kde sme narazili na fakt, že štandardná úplná rekonštrukcia viedla k operácii, ktorá nebola úplne pozitívna (pozri obrázok 8.10). V tomto prípade som sa vrátil priamo k



Obrázok 8.11: Zrekonštruovaná operácia z reálnych fyzikálnych dát pomocou ML metódy. ako je vidieť, obor hodnôt sa zaoblil a mierne posunul, v zásade sa však nedá hovoriť o jeho kontrakcii.

experimentálnym dátam a uskutočnil ML rekonštrukciu tejto operácie. Výsledok

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.06147 & 0.1403 & -0.01538 & -0.05707 \\ -0.09009 & 0.07373 & 0.3832 & 0.06082 \\ 0.03199 & -0.063 & -0.0973 & 0.719 \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

je znázornený na obrázku (8.11). Ako je vidieť, v tomto prípade prišlo k úplne inému "napraveniu" úplnej pozitivity operácie, ako tomu bolo v predošlej sekcii. Zatiaľ čo vtedy sme dosiahli želaný cieľ výhradne kontrakciou všetkých výstupných stavov smerom k úplnej zmesi, tu prišlo k akémusi vyrovnaniu v jednotlivých osiach. Tam, kde operácia nechávala stav prakticky nedotknutý, úprava dosiahla kontrakciu stavu. V kolmom smere, kde pôvodne zrekonštruovaná operácia prakticky ničila všetku informáciu, došlo naopak k natiahnutiu stavu a zachovanie väčšej časti informácie. Trochu pochopenia môže prameniť napríklad aj z faktu, že zatiaľ čo kontrakcia do bodu, na úsečku alebo zachovanie celej gule neporušenej sú úplne pozitívne operácie, kontrakcia na plochu túto vlastnosť nemá. Kým pôvodná metóda približovala operáciu ku kontrakcii do bodu, ML metóda ju približuje aj k ďalším povoleným operáciám ako kontrakcia do gule či na úsečku (zaguľatovanie a zoštíhľovanie oboru hodnôt).

8.3.3 Simulácie nefyzikálnych operácií

Úplne novým použitím ML metódy, ktorú predstavujem na záver svojej práce, je jej aplikácia pri hľadaní fyzikálnych aproximácií nefyzikálnych operácií. Inak povedané, predstavme si situáciu, keď máme definovanú operáciu (napríklad pomocou zadania jej matice ε , alebo iným jednoznačným spôsobom), avšak táto operácia nespĺňa niektorú z fyzikálnych podmienok.

Najčastejšie to môže byť podmienka úplnej pozitivity, avšak metódu je možné aplikovať aj na nepozitívne a/alebo nelineárne operácie.

V takomto prípade nemáme k dispozícii samotné experimentálne dáta, ale predpis na ich výrobu. Zvolíme si teda vhodným, symetrickým spôsobom vstupné stavy (pri lineárnych operáciách sa môžeme obmedziť na čisté vstupné stavy, pri ostatných musíme aj vstupy vyberať z celej Blochovej sféry) a smery výstupného merania. Nasimulujeme experiment (postup prípravy stavu, prechodu operáciou a meraním) a získame dáta, ktoré použijeme na zrekonštruovanie tentokrát už fyzikálnej operácie.

Postup sa dá použiť na získanie predstavy o pôsobení prakticky akéhokoľvek predpisu. V dvoch príkladoch uvediem jeho aplikáciu na už vyššie spomenutú operáciu U-NOT a na špecifickú nelineárnu operáciu.

Odhad Optimal U-NOT

Tento príklad je relatívne jednoducho realizovateľný, pretože operácia U-NOT spĺňa podmienky pozitivity aj linearity. Ako sadu vstupných stavov som si zvolil šesť stavov (po dve vlastné hodnoty operátorov σ_x , σ_y , a σ_z) a operáciu zapísal v tvare (8.27). Výstupné merania boli rovnako prevedené v smere operátorov σ_x , σ_y , a σ_z . Pre každú kombináciu vstup - výstup som použil 100 stavov (spolu teda 1800 kvázi - experimentálnych *klikov*) a na získané dáta použil vyššie spomínané hľadanie extrému. Výsledkom bola matica operácie

$$\varepsilon_{O-U-NOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0002 & -0.3316 & -0.0074 & 0.0203 \\ 0.0138 & -0.0031 & -0.3334 & 0.0488 \\ -0.0137 & 0.0298 & -0.0117 & -0.3336 \end{pmatrix}. \quad (8.33)$$

Z nej je zjavné, že sa s presnosťou na približne dve desatinné miesta rovná hľadanej matici optimálneho U-NOT (8.28). Z tohoto dôvodu ani neuvádzam obrázok znázorňujúci jej účinok, nakoľko je prakticky zhodný s obrázkom 8.9.

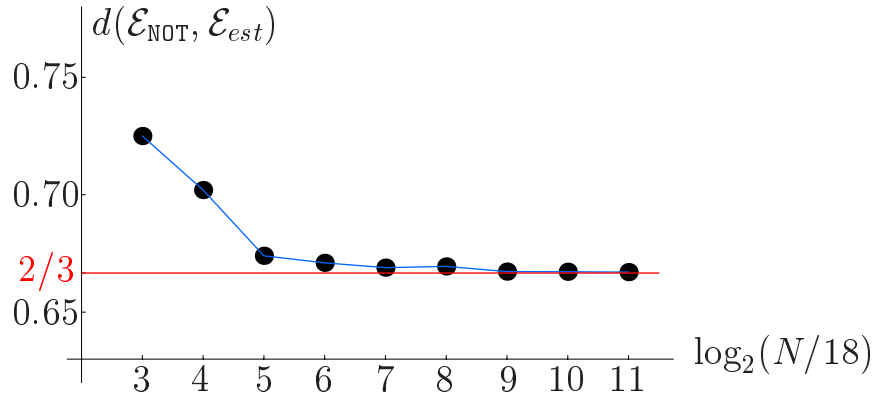
Zaujímavá otázka v tejto súvislosti tiež je, ako rýchlo celá metóda konverguje s počtom stavov. Pripravil som preto skupiny s rôznym počtom vstupných stavov (každá nasledujúca skupina mala dvojnásobný počet stavov ako predchádzajúca), pričom skupiny boli na sebe nezávislé a v prvej skupine bolo $18 * 8$ stavov (8 stavov na každý vstupný smer a každý smer merania). Pre každú skupinu stavov som potom vyprodukoval výsledky meraní a k nim spočítal najlepšiu aproximáciu fyzikálnej operácie. Na grafe (8.12) je znázornené, ako konvergovala vzdialenosť získanej operácie so zväčšujúcim sa počtom stavov od nefyzikálneho U-NOTu definovaná pomocou

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{stavy} \mathbf{d}\rho Tr((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)[\rho]) = \iiint Tr((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)[\rho]) r \sin(\nu) \mathbf{d}r \mathbf{d}\nu \mathbf{d}\varphi. \quad (8.34)$$

Je zrejmé, že táto vzdialenosť nemohla v nijakom prípade prekročiť hranicu $2/3$, ktorú dosahuje len optimálny odhad. Konvergencia k tejto hodnote bola ale veľmi rýchla a už pri hranici menej ako 50 stavov na jeden vstupný stav a jeden smer merania dosahujú výsledky vysokú presnosť.

Odhad nelineárnej operácie

Odhadovať operáciu, ktorá nespĺňa ani základnú podmienku kvantovej mechaniky - linearitu, je vo všeobecnosti veľmi ťažké. Aj pri ML metóde sa vynárajú niektoré problémy, ktoré sa pri



Obrázok 8.12: Graf závislosti vzdialenosti odhadovanej operácie od pôvodnej nefyzikálnej U-NOT od počtu použitých stavov. Červená hranica $2/3$ označuje optimálnu fyzikálnu aproximáciu.

odhade fyzikálnych operácií nevyskytujú.

Prvým je fakt, že ako vstupné stavy musíme voliť všetky možné stavy, teda rovnako čisté i zmiešané. Zďaleka sa nemôžeme uspokojiť s výberom niekoľko málo lineárne nezávislých stavov. To výrazne zhoršuje pokrytie skúmanej oblasti (pri konštantnom počte dát) a tiež produkuje výrazne komplikovanejšiu funkciu určenú na minimalizovanie. Stručne povedané, v tomto prípade nám rovnaká technická a časová náročnosť umožní použiť len podstatne menej skúmaných dát a výsledok bude horší, ako keby sme použili rovnaký počet dát v lineárnom prípade.

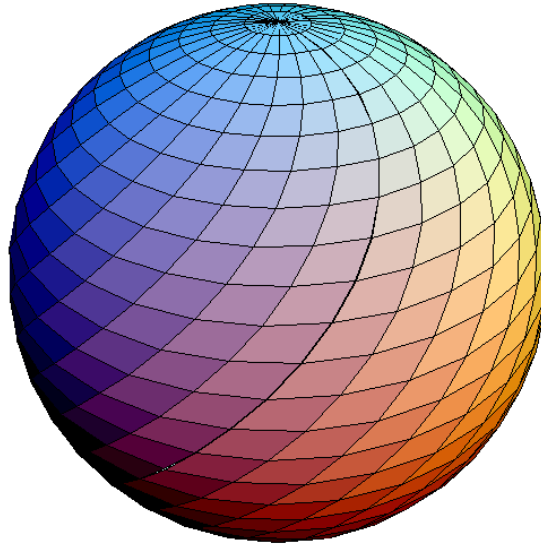
Druhým problémom je skutočnosť, že dáta sú vyprodukované a-priori nefyzikálnou transformáciou a konvergencia takýchto dát pri minimalizačnom algoritme je vo všeobecnosti podstatne horšia ako u fyzikálnych dát. Navyiac nie je zaručené, že existuje len jedno minimum, do ktorého funkcia môže skonvergovať. Napriek všetkým týmto problémom som ale metódu vcelku úspešne testoval na jednoparametrickej grupe operácií danej predpisom

$$\rho \longrightarrow e^{ik\langle\sigma_z\rangle\sigma_z} \rho \quad (8.35)$$

s jedným voľným parametrom k (pozri obrázok . Za týmto relatívne jednoduchým predpisom sa skrýva operácia, ktorá realizuje stavovo závislé otočenie okolo osi z , pričom mieru tohoto otočenia vyjadruje práve parameter k . Pre konkrétny prípad $k = 1$ som vyprodukoval 1800 náhodných vstupných stavov rovnomerne rozdelených po Blochovej sfére. Na tieto stavy som aplikoval operáciu (8.35) a výsledok (pozitivita operácie zaručovala, že výsledkom bol vždy fyzikálny stav) som fiktívne premeral v náhodne zvolenom smere. Získané dáta som použil na získanie fyzikálneho odhadu testovanej kvantovej operácie. Výsledok

$$\varepsilon_{non-linear} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.114902 & 0.615367 & -0.532612 & 0.0385014 \\ -0.0882836 & 0.529802 & 0.655418 & 0.0890239 \\ 0.0461198 & -0.00447398 & 0.0268776 & 0.936151 \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

je možné interpretovať ako (v rámci presnosti metódy) istú kontrakciu, pričom jej sila je väčšia v smeroch osí x a y ako v smere osi z . Je zjavné, že tri z dvanástich parametrov

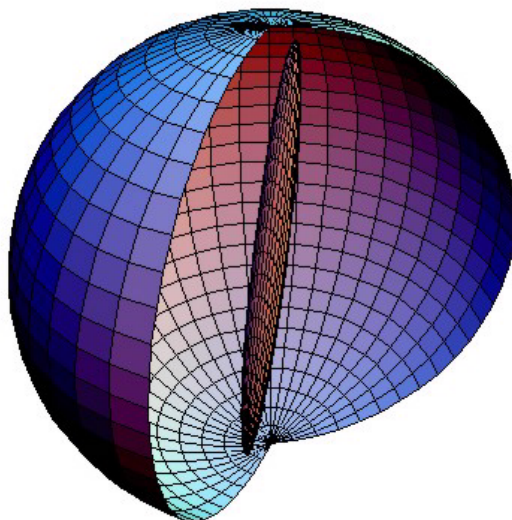


Obrázok 8.13: Schématické znázornenie akcie nelineárnej operácie. Stavý sú pootočené okolo osi z , pričom miera tohoto pootočeného je daná priemetom príslušného stavu na os z . Obrázok je vytvorený pre hodnotu $k = 1$.

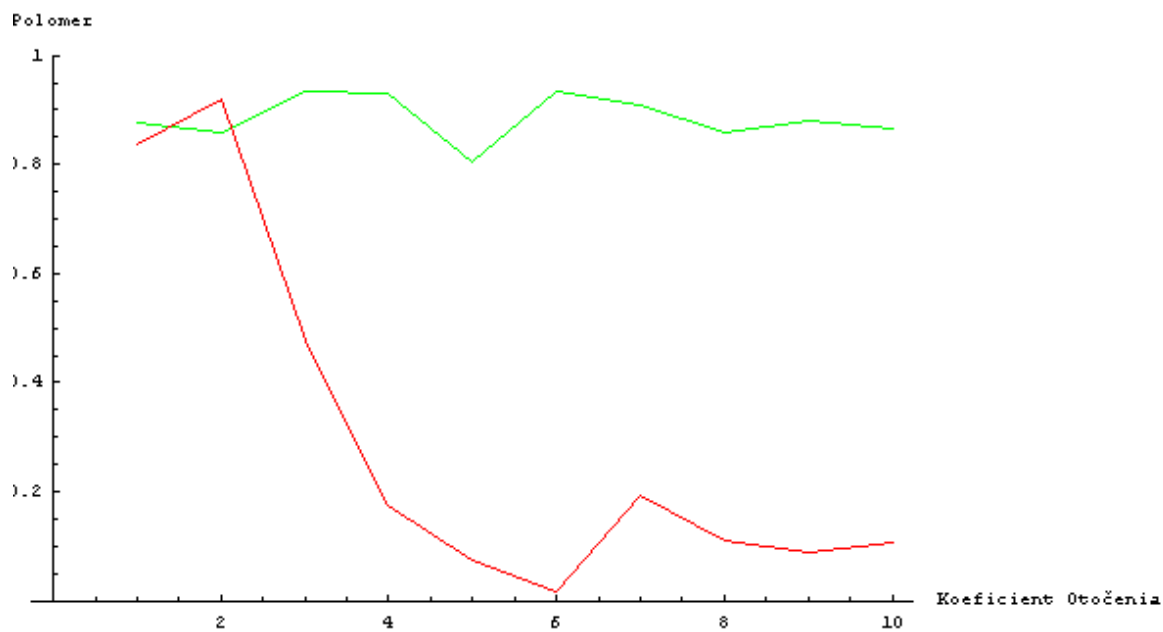
nadobúdajú násobne väčšie hodnoty ako ostatné. V ďalšom postupe som preto pevne určil všetky parametre okrem diagonálnych za nulové a zopakoval numerické prehládávanie s tým, že som musel skúmať len trojparametrickú oblasť. Výsledok bol v rámci presnosti výpočtu rovnaký ako v prípade prehládávania cez všetkých dvanásť parametrov.

Zopakoval som preto celý postup s tým, že som postupne menil parameter k od jedna po desať. Hľadal som výsledné operácie ako v dvanásťrozmernom priestore všetkých operácií, tak aj v trojrozmernom priestore zodpovedajúcom trom nezávislým kontrakciám v smeroch daných súradnou sústavou. Príklad výsledku pre $k = 6$ je na obrázku (8.14). Z výsledkov pre všetky sledované hodnoty parametra k som vybral dve zaujímavé hodnoty - mieru zmrštenia v smere osi z (ktorá by mala byť podľa očakávania nulová, nie je totiž dôvod, aby v tomto smere k nejakému zmršťovaniu dochádzalo) a priemernú mieru zmršťovania v ostatných dvoch osiach. Tu už bolo možné nejaký efekt očakávať³. Na grafe (8.15) sú znázornené dve kivky, pričom zelená zodpovedá zmršťovaniu v smere osi z a červená v ostatných dvoch osiach. Fluktuácie na úrovni cca 0.1 polomeru sú spôsobené obmedzeným počtom stavov použitým na odhad zobrazenia, napriek nim je však zrejmý rozdiel pre znázornené kivky. Môžeme teda súdiť, že najlepším odhadom prezentovanej nefyzikálnej operácie bude operácia, ktorá nemení priemet spinu na os z , ale (v závislosti od miery natočenia) zmršťuje stavý v smere ostatných dvoch osí.

³Samotnú operáciu si totiž veľmi laicky môžeme predstaviť ako žmýkanie prádla, vrch sa otáča v protismere ako spodok a stred približne stojí. A vieme, že pri takomto žmýkaní dochádza k zmršťovaniu prádla, čoho dôsledkom je práve vytlačenie prebytočnej vody.



Obrázok 8.14: Obor hodnôt najlepšej aproximácie k nelineárnej operácii otáčajúcej stavy okolo osi z v závislosti od súradnice z . Koeficient určujúci mieru rotácie je v tomto prípade rovný 6.



Obrázok 8.15: Zelená krivka na grafe znázorňuje zmrštenie v smere osi z , ktoré nie je závislé od miery otáčania a jeho hodnota je daná len nepresnosťou simulácie. Naproti tomu červená krivka zjavne so zväčšujúcim sa k klesá.

Kapitola 9

Záver

V prvej časti svojej práce som sa pokúsil zhrnúť známe poznatky o klasických koreláciách v klasickej fyzike (čo je preskúmaná a dobre rozvinutá téma) a tiež o previazaní v kvantovej fyzike (téma, ktorá bola v posledných rokoch objektom značného záujmu). V kapitole o klasických koreláciách v kvantovej fyzike sa kombinujú publikované fakty s úvahami a závermi, ktoré pokladám za samozrejmé a jasné a napriek tomu sa v bežnej literatúre často nevyskytujú. Snažil som sa predložiť ucelený prehľad problematiky z jedného pohľadu, ktorý pokladám za správny, nie však za jediný možný. Interpretácia klasických korelácií ako pozostatku viacčasticového previazania je síce veľmi lákavá, nikdy však nebude možné ju dokázať. Snažím sa preto držať známej poučky, že zo všetkých možných správnych vysvetlení daného javu je najlepšie to najjednoduchšie.

V kapitolách o previazaných a korelovaných grafoch som sa venoval špecifickému problému zdieľania dvojčasticových korelácií na veľkých systémoch. Pre neváhované grafy som dokázal, že vo väčšine prípadov môžu tieto korelácie na jednotlivých pároch existovať nezávisle, napriek tomu však existujú výnimky, keď pre isté skupiny grafov nie je možné zostrojiť čistý stav. Zostáva znova vecou názoru, nakoľko je požiadavka na *čistotu* stavu podstatná. Ja sám sa domnievam, že veľmi, nakoľko zmesi pokladám len za podsystemy väčších čistých systémov, na ktorých sa tieto analýzy môžu opakovať. Najdôležitejším výsledkom tejto časti je však sekcia o váhovaných previazaných grafoch. Tu som dokázal, že pri dodržaní daného horného limitu na previazanie jednotlivých dvojíc je možné ku každému grafu zostrojiť čistý fyzikálny stav. Tento fakt je zaujímavý, nakoľko dosiaľ, okrem špeciálnych prípadov, podobné výsledky publikované neboli.

Ďalšia časť mojej práce spočívala v skúmaní možností odhadu jednoqubitových kvantových kanálov za predpokladu, že nemáme o kanále (kvantovej operácii) dostatok experimentálnych dát. Po prehľade známych faktov a postupov aplikovaných hlavne na rekonštrukciu stavov som sformuloval konkrétny postup, ktorý je vhodné dodržať pri nedostatku vstupných stavov. Tento postup je založený na analógii s rekonštrukciou stavov a zaručuje maximálnu možnú konzervativitu výsledku. Porovnal som ho aj so situáciou, keď na známe experimentálne dáta bola použitá metóda Maximum Likelihood, ktorá vo svojej podstate dáva najlepšie možné výsledky, avšak za cenu vysokej výpočtovej náročnosti.

Obe tieto metódy som s úspechom použil aj na získanie fyzikálnych odhadov nefyzikálnych operácií. Prvá je obmedzená na istú triedu týchto kanálov (minimálne linearita a pozitivita je nutnou podmienkou, efektívne sa s jej pomocou teda dajú odhadovať len také operácie, ktorých jediný nedostatok je nesplnenie požiadavky úplnej positivity). Druhá vie pracovať

prakticky s ľubovoľnými dátami, dá sa preto použiť (aspoň na prvé priblíženie, z dôvodu ohraničenej presnosti práce a nutnosti plne numerického postupu) na odhad ľubovoľnej jednoznačnej operácie.

Mnoho otázok zostáva stále otvorených. Zaujímavou výzvou je miera klasických korelácií, ktorá by bola kompatibilná s konkurenciou alebo previazaním formovania. Pokiaľ by sa podarilo podobnú mieru nájsť (najslubnejšie sa zatiaľ ukazuje skúšať iné entropie s použitím definície indexu korelácie či vzájomnej informácie), bolo by možné pracovať na váhovaných korelovaných grafoch. Verím, že práve tu by sa mohli ukázať zaujímavé výsledky, pretože aj pri ľubovoľne slabých koreláciách sa na čistých stavoch ukazovali isté obmedzenia. Navyiac, vo veľmi vzdialenom horizonte by miera klasickej korelácie mohla viesť k pochopeniu a nájdeniu miery viacčasticového previazania.

Ďalšou témou sú logické siete na prípravu stavov. Je známy fakt, že každý stav sa dá pripraviť, vo všeobecnosti je však na to potrebné použiť exponenciálne množstvo hradiel. Z experimentálneho hľadiska, vzhľadom na chybovosť súčasných i budúcich zariadení, je tento postup neakceptovateľný a je nutné hľadať postupy (špecifické pre dané triedy stavov), ktoré umožnia jednoduchšiu prípravu. Toto je zaujímavé hlavne v súvislosti so stavmi navrhovanými pre korelované a previazané grafy. Pre váhované grafy sa podarilo nájsť sieť, ktorá používa počet hradiel úmerný počtu previazaných párov, teda maximálne kvadraticky závislý od počtu qubitov. V tejto oblasti spolupracujem so svojím diplomantom na všeobecnom riešení problému za pomoci počítačového programu.

Ak v súvislosti so systémami mnohých častíc hovorím o grafoch, bolo by zaujímavé aj využívať niektoré známe vety z teórie grafov, ktoré by prípadne mohli vniest' viac svetla do problému zdieľania previazania. Pokračujú práce na možnom "sčítavaní grafov", teda analýze toho, ako sa mení previazanie jednotlivých dvojíc qubitov v prípade, že robíme konvexnú kombináciu dvoch stavov reprezentovaných rôznymi váhovanými grafmi. Ukazuje sa, že pri danom pomere stavov nie je možné len z grafov určiť, aké budú výsledné previazania. Snažíme sa zistiť, aké ďalšie údaje by bolo potrebné uvádzať v grafe (napríklad rozšíriť váhu z reálneho kladného čísla na komplexné), aby bolo možné určiť graf výslednej kombinácie stavov len na základe znalosti grafov stavov, z ktorých kombinácia vzniká a, pochopiteľne, jej pomeru.

V súvislosti s odhadmi operácií bude zaujímavé skúmať konkrétne experimentálne dáta a porovnávať naše výsledky s pôvodnými, hlavne v prípadoch, kde sa v experimente pracovalo s nedostatkom dát alebo systematickými chybami. Konkrétna spolupráca v tejto oblasti prebieha so skupinou Prof. Christofa Wunderlicha z National university of Ireland, Maynooth. Ďalšou otázkou je použitie spomínaných metód rekonštrukcie na rôzne nelineárne pozitívne operácie a hľadanie ich fyzikálnych lineárnych priblížení.

Nazdávam sa, že problematika kvantového spracovania informácie, niektorým aspektom ktorej je venovaná táto práca, je veľmi zaujímavá a pozornosť, ktorá sa jej v súčasnosti na celom svete venuje povedie k prevratným výsledkom. Hoci je pravdou, že teória predbieha o mnoho dĺžok experimentálne výsledky, je dobré byť pripravený na čas, keď sa aj v tomto smere pohnú veci výrazne dopredu. Nádeje, ktoré sa vkladajú do kvantových počítačov či kvantovej komunikácie sú aj medzi laickou verejnosťou veľké a bolo by ich dobré, aspoň z dlhodobého hľadiska, nesklamovať.

Dodatok A

Váňované grafy

A.1 Výpočet konkurencie

V tomto dodatku prevediem výpočet konkurencie stavu vo forme (6.32), teda

$$|\Psi\rangle = \alpha (|00\dots 00\rangle + |11\dots 11\rangle) + \sum_{\{i,j\}} \gamma_{ij} (|11\rangle_{ij} |00\dots 00\rangle_{\overline{ij}} + |00\rangle_{ij} |11\dots 11\rangle_{\overline{ij}}), \quad (\text{A.1})$$

kde reálne kladné parametre α a γ_{ij} splňajú normalizačnú podmienku

$$2\alpha^2 + 2 \sum_{\{i,j\}} \gamma_{ij}^2 = 1. \quad (\text{A.2})$$

Sumy v rovniciach (A.1) a (A.2) prebiehajú pre všetky $i \neq j$, $i, j \in \hat{N}$ tak, že $\{i, j\} = \{j, i\}$ a teda $\gamma_{ij} = 0$ pre $i < j$. Špecifická forma stavu (A.1) má za následok relatívne jednoduchú výslednú dvojqubitovú maticu hustoty:

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & F \\ 0 & B & E & 0 \\ 0 & E & B & 0 \\ F & 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

kde sme použili označenie

$$\begin{aligned} A &= \gamma_{ij}^2 + \alpha^2 + \sum_{\{k,l\}} \gamma_{kl}^2; \\ B &= \sum_k (\gamma_{kj}^2 + \gamma_{ki}^2); \\ E &= 2 \sum_k \gamma_{ki} \gamma_{jk}; \\ F &= 2\alpha \gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Všetky sumy v (A.4) bežia cez voľné parametre k (a l), kdežto i a j špecifický, fixovaný pár v grafe. navyac požadujeme splnenie podmienky $i \neq k \neq l \neq j$.

Vhodná forma matice (A.3) nám umožní vypočítať odmocniny vlastných hodnôt matice R (3.42) použitej pri výpočte konkurencie:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= A + F; \\ \lambda_2 &= A - F; \\ \lambda_3 &= B + E; \\ \lambda_4 &= B - E.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Keďže koeficienty A, B, E, F sú kladné, jediní kandidáti pre maximálnu vlastnú hodnotu sú λ_1 a λ_3 . Definujme ďalej

$$\gamma_{\max} = \max_{i,j}(\gamma_{ij}).\tag{A.6}$$

S využitím podmienky

$$\alpha \geq 2\gamma_{\max}\sqrt{N-2}\tag{A.7}$$

vidíme, že $\lambda_1 \geq \lambda_3$ a všeobecné vyjadrenie konkurencie stavu podľa (A.1) je

$$C_{ij} = \max \left\{ 2 \left(2\alpha\gamma_{ij} - \sum_{\{k,i\}} \gamma_{ki}^2 - \sum_{\{k,j\}} \gamma_{kj}^2 \right), 0 \right\}.\tag{A.8}$$

A.2 Dôkaz konvergencie iteračnej metódy

Označme konkurencie, ktoré sú dané požadovanou konfiguráciou grafu, ako C_{ij} . V ďalšom budem používať hrubé C na označenie požadovaných konkurencií, aby som ich odlišil od akýchkoľvek priebežných výsledkov získaných v priebehu iteračnej metódy.

Ako bolo spomenuté v hlavnom texte, iterácia začína zo špecifického stavu (6.32), pričom všetky gamy sú rovnaké a určené rovnicou

$$\gamma_{ij}^{(0)} \equiv \frac{\lambda}{\sqrt{2 + N(N-1)\lambda^2}}.\tag{A.9}$$

Parameter λ je definovaný ako

$$\lambda = \frac{\sqrt{4(N-2)^2 + 2N(N-1)} - 2(N-2)}{N(N-1)}.\tag{A.10}$$

Zodpovedajúce dvojčasticové konkurencie sa teraz dajú jednoducho spočítať:

$$\begin{aligned}C_{ij}^{(0)} = C_{\max} &= 2 \left(\alpha^{(0)}\gamma_{ij}^{(0)} - 2(N-2)(\gamma_{ij}^{(0)})^2 \right) \\ &= \frac{\sqrt{6N^2 - 18N + 16} - 2N + 4}{N(N-1)}.\end{aligned}\tag{A.11}$$

Pripomeniem ešte fakt, že parametre $\alpha^{(0)}$ a $\gamma_{ij}^{(0)}$ sú previazané normalizačnou podmienkou (6.33), takže α je priamo určený pomocou γ_{ij} a nie je použiteľný pre iterovanie. Samozrejme, rovnako musí byť za každých okolností splnená aj podmienka (6.35), ktorá zaručuje platnosť výsledku pre konkurencie.

Zavediem teraz potrebné označenie. Definujem usporiadanú množinu všetkých dvojíc qubitov na grafe, pričom každá dvojica sa bude nachádzať v danej množine práve raz. V každom iteračnom kroku sa zmení práve jeden parameter γ_{kl} pre daný pár qubitov $\{k, l\}$, pričom všetky ostatné parametre γ ostanú nedotknuté (je dôležité pripomenúť, že so zmenou ľubovoľného γ sa mení aj parameter α). Predpokladajme teraz, že po n -tom iteračnom kroku sú splnené podmienky (6.36) a (6.35) a $\alpha^{(n)}, \gamma_{ij}^{(n)}$ sú stále kladné (v prvom kroku je táto podmienka triviálne splnená). Potom

$$C_{ij}^{(n)} \geq \mathbf{C}_{ij}; \quad (\text{A.12})$$

$$\alpha^{(n)} \geq 2\sqrt{N-2}\gamma_{\max}^{(n)}; \quad (\text{A.13})$$

$$0 < \alpha^{(n)} \leq 1 \quad 0 \leq \gamma_{ij}^{(n)} < 1, \quad (\text{A.14})$$

platí pre všetky i, j . Parameter $\gamma_{\max}^{(n)}$ je definovaný rovnako ako v rovnici (A.6), teda

$$\gamma_{\max}^{(n)} = \max_{i,j}(\gamma_{ij}^{(n)}). \quad (\text{A.15})$$

V tomto iteračnom kroku zoberiem pár qubitov, ktorý v usporiadanej množine nasleduje za párom, ktorý sme spracovali v kroku n . Označme tento pár $\{i, j\}$. V nasledujúcom kroku prebehnú tieto zmeny:

$$\gamma_{ij}^{(n+1)} = \frac{U^{(n)} - V^{(n)}}{2}; \quad (\text{A.16})$$

$$\alpha^{(n+1)} = \frac{U^{(n)} + V^{(n)}}{2}, \quad (\text{A.17})$$

kde

$$U^{(n)} = \left[(\alpha^{(n)} + \gamma_{ij}^{(n)})^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{ij} - C_{ij}^{(n)}) \right]^{1/2};$$

$$V^{(n)} = \left[(\alpha^{(n)} - \gamma_{ij}^{(n)})^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{ij} - C_{ij}^{(n)}) \right]^{1/2}.$$

Žiaden z ostatných parametrov sa pritom nezmenil. Rozoberiem teraz niekoľko vlastností iteračného kroku:

(1) $\alpha^{(n+1)}$ a $\gamma_{ij}^{(n+1)}$ sú riešením rovnice

$$\alpha^{(n+1)}\gamma_{ij}^{(n+1)} = \alpha^{(n)}\gamma_{ij}^{(n)} + \frac{1}{4}(\mathbf{C}_{ij} - C_{ij}^{(n)})$$

a teda podľa rovnice (6.34) máme

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(n+1)} &= \max \left\{ 2 \left(2\alpha^{(n+1)}\gamma_{ij}^{(n+1)} - \sum_{\{k,i\}} (\gamma_{ki}^{(n+1)})^2 - \sum_{\{k,j\}} (\gamma_{kj}^{(n+1)})^2 \right), 0 \right\} \\ &= \max \{ \mathbf{C}_{ij}, 0 \} = \mathbf{C}_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

(2) $\alpha^{(n+1)}$ a $\gamma_{ij}^{(n+1)}$ spĺňajú normalizačnú podmienku (6.33).

(3) $\gamma_{ij}^{(n+1)}$ and $\alpha^{(n+1)}$ sú kladné a spĺňajú podmienku

$$0 \leq \gamma_{ij}^{(n+1)} < \gamma_{ij}^{(n)}; \quad (\text{A.19})$$

$$\alpha^{(n)} < \alpha^{(n+1)} \leq 1. \quad (\text{A.20})$$

(4) Z rovníc (A.19) a (A.20) dostávame

$$\alpha^{(n+1)} > \alpha^{(n)} \geq 2\sqrt{N-2}\gamma_{\max}^{(n)} \geq 2\sqrt{N-2}\gamma_{\max}^{(n+1)}. \quad (\text{A.21})$$

Z toho je zrejmé, že podmienka (A.13) platí aj pre krok $(n+1)$.

(5) Konkurencie pre $k, l \neq i, j$ sa menia nasledovne

$$\begin{aligned} C_{kl}^{(n+1)} &= 2 \left(2\alpha^{(n+1)}\gamma_{kl}^{(n+1)} - \sum_{\{k,m\}} \left(\gamma_{km}^{(n+1)} \right)^2 - \sum_{\{l,m\}} \left(\gamma_{lm}^{(n+1)} \right)^2 \right) \\ &= 2 \left(2\alpha^{(n+1)}\gamma_{kl}^{(n)} - \sum_{\{k,m\}} \left(\gamma_{km}^{(n)} \right)^2 - \sum_{\{l,m\}} \left(\gamma_{lm}^{(n)} \right)^2 \right) \\ &> 2 \left(2\alpha^{(n)}\gamma_{kl}^{(n)} - \sum_{\{k,m\}} \left(\gamma_{km}^{(n)} \right)^2 - \sum_{\{l,m\}} \left(\gamma_{lm}^{(n)} \right)^2 \right) \\ &= C_{kl}^{(n)} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

a pre $k = i$

$$\begin{aligned} C_{il}^{(n+1)} &= 2 \left(2\alpha^{(n+1)}\gamma_{il}^{(n+1)} - \sum_{\{i,m\}} \left(\gamma_{im}^{(n+1)} \right)^2 - \sum_{\{l,m\}} \left(\gamma_{lm}^{(n+1)} \right)^2 \right) \\ &= 2 \left(2\alpha^{(n+1)}\gamma_{il}^{(n)} - \sum_{\{i,m\}} \left(\gamma_{im}^{(n+1)} \right)^2 - \sum_{\{l,m\}} \left(\gamma_{lm}^{(n)} \right)^2 \right) \\ &> 2 \left(2\alpha^{(n)}\gamma_{il}^{(n)} - \sum_{\{i,m\}} \left(\gamma_{im}^{(n)} \right)^2 - \sum_{\{l,m\}} \left(\gamma_{lm}^{(n)} \right)^2 \right) \\ &= C_{il}^{(n)}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Rovnaký výsledok dostaneme z dôvodu symetrie aj pre $k = j$.

Týmto som ukázal, že po danom iteračnom kroku bude pre fixné i, j (teda pre istú dvojicu qubitov) $C_{ij}^{(n+1)} = \mathbf{C}_{ij}$ a všetky ostatné konkurencie sa zväčšia. Podmienka pre všetky i, j $C_{ij}^{(n+1)} \geq \mathbf{C}_{ij}$ zostane zachovaná a stav definovaný v (6.32) s parametrami $\gamma_{ij}^{(n+1)}$ môže byť použitý pre ďalší iteračný krok.

Celá iteračná procedúra teda bude definovaná postupnosťami parametrov $\{\alpha^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\gamma_{ij}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ pre každý pár i, j (teda pre každú dvojicu qubitov, každú hranu váhovaného previazaného grafu). Všetky postupnosti sú monotónne a ohraničené, majú teda limitu. Označme tieto limity α a γ_{ij}

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{(n)} \quad \Rightarrow \quad \alpha \in (0, 1); \quad (\text{A.24})$$

$$\gamma_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{ij}^{(n)} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{ij} \in (0, 1). \quad (\text{A.25})$$

Vyberieme a zafixujeme dvojicu parametrov i a j a ukážeme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{ij}^{(n)} = \mathbf{C}_{ij}. \quad (\text{A.26})$$

Najskôr definujme postupnosť $\{k(n)\}_{n=0}^{\infty}$ nasledovne: $k(1) = p$, kde p je poradie $\{i, j\}$ vo vyššie definovanej postupnosti párov qubitov, a $k(n) = p + \frac{nN(N-1)}{2}$. Potom

$$C_{ij}^{(k(n))} = \mathbf{C}_{ij}. \quad (\text{A.27})$$

Rovnica (A.26) je rovnocenná definíciou

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) (\forall n \in \mathbf{N}, n > n_0) (|C_{ij}^{(n)} - \mathbf{C}_{ij}| < \varepsilon). \quad (\text{A.28})$$

Vyberme fixný parameter ε . Teraz musíme nájsť také n_0 , aby spĺňalo definíciu (A.28). Keďže postupnosti $\{\alpha^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\gamma_{kl}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ limitu majú, sú to Cauchyovské postupnosti, a preto

$$(\forall \tau \in \mathbf{R}, \tau > 0) (\exists m_0 \in \mathbf{N}) (\forall n, m \in \mathbf{N}, n, m > m_0) (\forall \{k, l\}) \left(\begin{array}{l} |\alpha^{(n)} - \alpha^{(m)}| < \tau \\ |\gamma_{kl}^{(n)} - \gamma_{kl}^{(m)}| < \tau \end{array} \right),$$

kde

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4N(N-1)}. \quad (\text{A.29})$$

Pre dané τ existuje také m_0 , že vlastnosť (A.29) je splnená a môžeme zdefinovať n_0 ako

$$n_0 \equiv k(m_0) > m_0. \quad (\text{A.30})$$

Teraz spočítame hodnoty $|C_{ij}^{(n+1)} - C_{ij}^{(n)}|$ pre $n+1 > n_0$ a $n+1 \notin \{k(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Posledná podmienka vyjadruje fakt, že $(n+1)$ iteračný krok nemení $\gamma_{ij}^{(n)}$. Z rovníc (A.22) a (A.23) dostaneme dve možnosti výsledku, buď

$$\left| C_{ij}^{(n+1)} - C_{ij}^{(n)} \right| = 4 \left| \alpha^{(n+1)} - \alpha^{(n)} \right| \left| \gamma_{ij}^{(n)} \right| < 4\tau < 8\tau, \quad (\text{A.31})$$

alebo

$$\begin{aligned} |C_{ij}^{(n+1)} - C_{ij}^{(n)}| &= \left| 4(\alpha^{(n+1)} - \alpha^{(n)})\gamma_{ij}^{(n)} - 2(\gamma_{il}^{(n+1)})^2 + 2(\gamma_{il}^{(n)})^2 \right| \\ &< 4 \left| \alpha^{(n+1)} - \alpha^{(n)} \right| \left| \gamma_{ij}^{(n)} \right| + 2 \left| \gamma_{il}^{(n+1)} - \gamma_{il}^{(n)} \right| \left| \gamma_{il}^{(n+1)} + \gamma_{il}^{(n)} \right| \\ &< 8\tau, \end{aligned}$$

kde $\gamma_{il}^{(n)}$ je parameter, ktorý bol menený v $(n + 1)$ iteračnom kroku.

Nakoniec môžeme pre $n > n_0$ konštatovať, že ak $n \in \{k(n)\}_{n=0}^{\infty}$, potom $|C_{ij}^{(n)} - \mathbf{C}_{ij}| = 0$. A opačne, vždy existuje také $u \in \mathbf{N}_0$, že

$$n \in \langle k(m_0 + u), k(m_0 + u + 1) \rangle. \quad (\text{A.32})$$

Dostávame teda

$$\begin{aligned} |C_{ij}^{(n)} - \mathbf{C}_{ij}| &= \left| (C_{ij}^{(n)} - C_{ij}^{(n-1)}) + (C_{ij}^{(n-1)} - C_{ij}^{(n-2)}) + \dots + \underbrace{(C_{ij}^{(k(m_0+u))} - \mathbf{C}_{ij})}_{=0} \right| \\ &< \frac{8N(N-1)\tau}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Potom ale musí platiť, že

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{ij}^{(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(2\alpha^{(n)} \gamma_{ij}^{(n)} - \sum_{\{k,i\}} (\gamma_{ki}^{(n)})^2 - \sum_{\{k,j\}} (\gamma_{kj}^{(n)})^2 \right) \\ &= 2 \left(2\alpha \gamma_{ij} - \sum_{\{k,i\}} \gamma_{ki}^2 - \sum_{\{k,j\}} \gamma_{kj}^2 \right). \end{aligned}$$

Všetky ostatné podmienky zostávajú v platnosti aj v limitnej forme. Keďže celý postup sa dá zopakovať pre ľubovoľné fixované i a j , dostávame tak potrebné parametre γ_{ij} definujúce stav (6.32), ktorý zodpovedá želanej konfigurácii.

Dodatok B

Publikácie a príspevky na konferenciách

Články v časopisoch:

- M. Plesch, *Stabilization via covariant symmetrization*, Acta Physica Slovaca **52** (2002) 409
- M. Plesch and V. Bužek, *Entangled graphs: Bipartite correlations in pure multipartite states*, Physical Review A **67**, 12322 (2003)
- M. Plesch and V. Bužek, *Entangled graphs*, Quantum Information and Computation **2**, 530-539 (2002)
- M. Plesch and V. Bužek, *Entangled graphs II: Classical correlations in multi-qubit entangled systems*, Physical Review A **68**, 12313 (2003)
- M. Plesch, J. Novotný, Z. Dzuráková a V. Bužek, *Controlling bipartite entanglement in multipartite states*, Journal of Physics A **37**, issue 5, 1843 - 1859 (2004)
- M. Ziman, M. Plesch a V. Bužek, *Reconstruction of superoperators from incomplete measurements*, quant-ph 0406088 (2004), prijaté na publikáciu vo Foundations of Physics (2004)
- M. Ziman, M. Plesch a V. Bužek, *Process reconstruction: from unphysical to physical*, zaslané do Physical Review Letters

Príspevky na konferenciách:

- IV Adriatico Research Conference on Quantum Interferometry, Trieste, 11. až 15.3.2002, poster *Entangled Graphs*
- Young European Physicists meeting 2002, Obergurgl, 20. až 25.4.2002, prednáška *Entangled Graphs: Bipartite correlations in multipartite states*, www.quniverse.sk/plesch/graphs_Obergurgel.ppt

- ERATO workshop on Quantum Information Science, Tokio, 5. až 8.9.2002, prednáška *Entangled Graphs: Bipartite correlations in multipartite states*, www.quniverse.sk/plesch/graphs_EQIS.ppt
- Tamagawa university, Tokio, 12.9.2002, prednáška *Bipartite correlation and entanglement in multipartite states*, www.quniverse.sk/plesch/pub/graphs_Tokyo.ppt
- EURESCO conference on Quantum Optics, San Feliu, 20. až 26.9.2002, poster *Bipartite correlation in multipartite states*, www.quniverse.sk/plesch/pub/graphs_poster.ppt
- Týždeň absolventov Matfyzu, FMFI UK Bratislava, 19.12.2002, prednáška *Kvantové korelácie v mnohočasticových systémoch*, www.quniverse.sk/plesch/pub/TAM1.ppt
- Workshop QIPC 2003, Oxford, 25.7.2003, prednáška *Entangled graphs*, www.quniverse.sk/plesch/pub/graphs_oxford.ppt
- Stretnutie IQING, Garching, 2.-5.12.2003, prednášky *Entangled graphs, Operation tomography*, www.quniverse.sk/plesch/pub/graphs_garching.ppt
- Pracovná cesta Peking, Hefei, 5.-26.5.2004, štyri prednášky na univerzitách v Hefei a Pekingu, www.quniverse.sk/plesch/pub/Cina.zip
- Workshop QIPC 2004, Rím, Taliansko, 20.-22.9.2004, prednáška *Reconstructions of quantum channels from incomplete data*, www.quniverse.sk/plesch/pub/tomography.ppt

Literatúra

- [1] www.magiqtech.com, www.idquantique.com a iné
- [2] Einstein, Podolsky and Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Physical Review **47**, 777 (1935)
- [3] J. S. Bell: *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, Physics **1**, 195-200 (1964)
- [4] T. M. Cover and J.A. Thomas; *Elements of Information Theory*, (John Wiley & sons , 1991)
- [5] M. Plesch and V. Bužek, *Entangled graphs: Bipartite correlations in pure multipartite states*, Physical Review A **67** (2003); pozri tiež Los Alamos e-print arXiv quant-ph 0211020 (2002)
- [6] M. Plesch, J. Novotný, Z. Dzuráková and V. Bužek, *Controlling bipartite entanglement in multipartite states*, Journal of Physics A **37**, issue 5, 1843 - 1859 (2003)
- [7] M. Plesch and V. Bužek, *Entangled graphs II: Classical correlations in multi-qubit entangled systems*, Physical Review A **68**, 012313 (2003)
- [8] M. Ziman, M. Plesch and V. Bužek, *Reconstruction of superoperators from incomplete measurements*, quant-ph 0406088 (2004); M. Ziman, M. Plesch and V. Bužek, *Process reconstruction: from unphysical to physical*, zaslané do Physical Review Letters
- [9] C. E. Shannon, Bell. Syst. Tech. J. **27**, 379 a 623 (1948)
- [10] N. Bohr: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Physical Review **48**, 696 (1935)
- [11] D. Bohm: *Quantum theory*, (Prentice-Hall, New York, 1951, p. 614)
- [12] A. Peres: *Quantum theory: Concepts and methods*, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1995)
- [13] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger: *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*, Physical Review Letters **49**, 1804 (1982)
- [14] www.uibk.ac.at
- [15] A Zeilinger et al.: *Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement*, Physical Review Letters **82**, 1345 (1999)

- [16] I. C. Percival: *Why do Bell experiments?*, quant-ph 0008097
- [17] E. S. Fry, R. C. Thompson: Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories, PRL **37**, 465 (1976)
- [18] J. Preskill: *Quantum Information and Computation*, (<http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/notes/book.ps>, 1998)
- [19] A. Peres: *Separability Criterion for Density Matrices*, Physical Review Letters **77**, 1413-1415 (1996)
- [20] R.F. Werner: *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*, Physical Review A **40**, 4277 (1989)
- [21] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki: *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*, Physical Letters A **223**,1 (1996)
- [22] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki: *Separability of n-particle mixed states: necessary and sufficient conditions in terms of linear maps*, Physical Letters A **283**,1 (2001)
- [23] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki: *Limits for Entanglement Measures*, Physical Review Letters **84**, 2014 (2000)
- [24] M. B. Plenio and V. Vedral: *Teleportation, entanglement and thermodynamics in the quantum world*, Contemporary physics **39/6**, 431 (1998)
- [25] W. K.Wootters: *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Physical Review Letters **80**, 2245 (1998)
- [26] S. Hill and W. K.Wootters: *Entanglement of a pair of quantum bits*, Physical Review Letters **78**, 5022 (1997)
- [27] M. Lewenstein, D. Bruss, J.I. Cirac, B. Kraus, M. Kus, J. Samsonowicz, A. Sanpera and R. Tarrach: *Separability and distillability in composit quantum systems*, Journal of Modern Optics **47**, 2841 (2000)
- [28] V. Coffman, J. Kundu and W. K. Wootters: *Distributed entanglement*, Physical Review A **61**, 052306 (2000)
- [29] H. Araki and E. H. Lieb, Comm. Math. Phys. **18**, 160 (1970)
- [30] R. A. Fisher, *Theory of statistical estimation*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **22**, 700-725 (1925)
- [31] E. T. Janes, *Information Theory and Statistical Mechanics. II*, Physical Review **108**, 171 (1957)
- [32] W. Dür, *Multipartite entanglement that is robust against disposal of particles*, Physical Review A **63**, 020303(R) (2001)
- [33] A. Uhlmann, Rep. Math. Phys. **9**, 273 (1976); *ibid* **24**, 229 (1986)

- [34] M. Koashi, V. Bužek, N. Imoto, *Entangled webs: Tight bound for symmetric sharing of entanglement*, Physical Review **A 62**, 050302 (2000)
- [35] G. M. Paris and J. Řeháček, *Quantum Estimations: Theory and Experiment - Springer Series on Lecture Notes in Physics*, (Springer-Verlag, Berlin, 2004)
- [36] G. M. D'Ariano and P. Lo Presti, *Tomography of quantum operations*, Physical Review Letters **86**, 4195 (2001)
- [37] M. Ježek, J. Fiurášek and Z. Hradil, *Quantum inference of states and processes*, Physical Review A **68**, 012305 (2003)
- [38] M. Raginski, *Quantum system identification*, quant-ph 0306008 (2003)
- [39] J. F. Poyatos, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Complete characterization of a quantum process: two-qubit quantum gate*, Physical Review Letters **78**, 390 (1997)
- [40] M. Nielsen and I. Chuang: “*Quantum Computation and Quantum Information*” (Cambridge University Press, Cambridge, 2000)
- [41] E. T. Jaynes: *Information theory and statistical mechanics*. In: *1962 Brandeis Lectures*, vol 3, ed. by K.W. Ford (Benjamin, Elmsord, New York 1963) p. 181.
- [42] V. Bužek, M. Hillery and R. Werner, *Optimal manipulation with qubits: Universal-NOT gate*, Physical Review A **60**, R2626-R2629 (1999)
- [43] J. Fiurášek and Z. Hradil, *Maximum-likelihood estimation of quantum processes*, Physical Review A **63**, 020101(R) (2001)
- [44] M. F. Sacchi, *Maximum-likelihood reconstruction of CP maps*, Physical Review A **63**, 054104 (2001)
- [45] J. Fiurášek and Z. Hradil, *Comment on "Maximum likelihood reconstruction of CP maps"*, quant-ph/0009104, quant-ph/0101048
- [46] V. Bužek in *Coherence and statistics of photons and atoms*, edited by Jan Peřina (Wileys Series in Lasers and Applications, John Willey & sons, 2001)