

Vedecká rada Fakulty matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

Mgr. Peter Rapčan

Autoreferát dizertačnej práce

Multiple Observations of Quantum Systems

na získanie akademickej hodnosti

philosophiae doctor

v štúdijskom programe doktorandského štúdia

4.1.2 všeobecná fyzika a matematická fyzika

Bratislava 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia
v *Centre pre výskum kvantovej informácie* na Fyzikálnom ústave
Slovenskej akadémie vied v Bratislave

- Predkladateľ:** Mgr. Peter Rapčan
Fyzikálny ústav SAV
Dúbravská cesta 9
845 11 Bratislava
- Školiteľ:** prof. RNDr. Vladimír Bužek, DrSc.
Fyzikálny ústav SAV
Dúbravská cesta 9
845 11 Bratislava
- Oponenti:** ao. Univ. Prof. Caslav Brukner
Faculty of Physics, University of Vienna
Boltzmanngasse 5
1090 Vienna, Austria
- doc. Mgr. Jaromír Fiurášek PhD.
Přírodovědecká fakulta, Palackého univerzita
Křížkovského 8
771 47 Olomouc, Česká republika
- RNDr. Jan Bouda, PhD.
Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a
602 00 Brno, Česká republika

Autoreferát bol rozoslaný: 13.1.2011

Obhajoba dizertačnej práce sa koná 24.2.2011 o 16:00 hod. pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce v študijnom programe doktorandského štúdia vymenovanou predsedom spoločnej odborovej komisie 4.1.2, všeobecná fyzika a matematická fyzika na Fyzikálnom ústave SAV, Dúbravská cesta 9, 845 11 Bratislava.

Predseda spoločnej odborovej komisie
prof. RNDr. Peter Prešnajder, DrSc.
FMFI UK, Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Obsah

| | | |
|----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Úvod | 2 |
| 2 | Ciele dizertačnej práce | 3 |
| 3 | Viacnásobné merania kvantových systémov | 3 |
| 3.1 | Matematický popis merania | 3 |
| 3.2 | Definícia problému | 3 |
| 3.3 | Zjednodušenia | 5 |
| 4 | Maximálne informatívne merania | 7 |
| 5 | Prípad slabých meraní | 9 |
| 5.1 | Rovnostárski pozorovatelia | 9 |
| 5.2 | Identické merania preferujúce posledného pozorovateľa | 13 |
| | Literatúra | 14 |
| 6 | Zoznam publikácií | 15 |
| 7 | Zoznam citácií | 15 |
| 8 | Príspevky na konferenciách | 17 |
| 9 | Summary | 18 |

1 Úvod

V klasickej fyzike sú stavy fyzikálneho systému, aspoň v princípe, úplne rozlíšiteľné. Nie je teda dôvod aby ľubovoľný počet pozorovateľov nemohol, aspoň v princípe, pozorovať rovnaké hodnoty parametrov popisujúcich stav systému. Dalo by sa argumentovať nasledovne: Ak by aj meranie systému viedlo k zmene jeho stavu, pozorovateľ by mohol pripraviť pre ďalšieho pozorovateľa systém s parametrami, ktoré práve namerá.

Na druhej strane, v kvantovej fyzike sú povolené neortogonálne stavy, t. j. ak fyzikálny systém je v stave $|a\rangle$, pozorovateľ môže stále meraním¹ prísť k záveru že systém bol v neortogonálnom stave $|b\rangle \neq |a\rangle$. Následne, aj keby pri meraní nenastávala zmena stavu systému, neskorší pozorovateľ môže prísť k záveru o jeho stave, ktorý je odlišný od záveru predchádzajúceho pozorovateľa. Bez zmeny stavu pri meraní však aspoň odhad každého z pozorovateľov môže byť v priemere rovnako presný. Avšak v kvantovej mechanike každé meranie, ktoré vedie k získaniu informácie o stave systému, ktorý mohol byť v jednej z neortogonálnych konfigurácií, je vo všeobecnosti sprevádzané narušením stavu meraného systému (pozri napr. [3, 8]).

Očividne, ak dané meranie extrahuje maximálne možné množstvo informácie o stave systému, potom ten istý pozorovateľ už nemôže jeho ďalším meraním získať o systéme viac informácie. Toto takmer tautologické tvrdenie má zaujímavý dôsledok: vždy, keď je množina možných stavov systému neortogonálna, a teda získateľná informácia je vo všeobecnosti neúplná, maximálne informatívne kvantové meranie, bez ohľadu na to, ako opatrne je prevedené, z pohľadu daného pozorovateľa maže akúkoľvek (ďalšiu) informáciu o pôvodnom stave systému.

Ak však uvažujeme o druhom pozorovateľovi, vykonávajúcim na systéme svoje nezávislé meranie s cieľom získať informáciu o jeho pôvodnom stave, musíme vyššie uvedený záver zrevidovať. Výsledky zo štúdia problému tzv. information-disturbance trade-off-u – vid' [9], [3] (prípád jedného čistého stavu qubitu), [2] (jeden čistý qudit), [4, 12] (konečný ensemble čistých qubitov, druhá z referencií obsahuje aj conjecture pre qudity), [14] (koherentné stavy el. mag. poľa), [13] (prístup s mierou informácie založenou na entropii namiesto bežne používanej priemernej fidelity), (pozri tiež [5], [11]) – hovoria, že stav po meraní, dokonca aj maximálne informatívnom, môže mať v priemere relevantný prekryv so stavom pred meraním.

V predkladanej dizertačnej práci skúmame do akej miery môžu navzájom nezávislí pozorovatelia, jeden po druhom merajúci kvantový systém, získať informáciu o jeho neznámom stave (kvantifikovanú fidelitou). Vyšetrujeme dosiahnuteľnú fidelitu v prípade, keď na uloženie informácie o čistom stave d -hladinového systému (quditu) je k dispozícii jeden alebo viac quditov.

1. Myslíme meranie na jednej kópii systému, ak nemáme apriórnu vedomosť o tom, že množina možných konfigurácií systému je ortogonálna. Výrok platí aj pre konečný počet kópií.

2 Ciele dizertačnej práce

1. Nájsť explicitné výrazy pre dosiahnuteľnú fidelitu jednotlivých pozorovateľov, ako aj ich optimálne merania v prípade, keď každý z nich vykonáva maximálne informatívne meranie, t. j. usiluje sa v prvom rade o čo najvyššiu priemernú kvalitu svojho vlastného odhadu.
2. Vyšetriť “klasickú limitu,” t.j. situáciu, kedy je veľký počet pozorovateľov schopný získať (takmer) úplnú informáciu o tomto jedno-quditovom stave.
3. Okrem prípadu, keď všetci pozorovatelia vykonávajú maximálne informatívne merania sa zaoberať aj situáciou, kedy konečný počet pozorovateľov robí estimáciu stavu s rovnakou fidelitou a situáciou, kedy je estimácia každého pozorovateľa vykonávaná rovnakým meraním navrhnutým tak, aby bola kvalita odhadu stavu posledného pozorovateľa čo najvyššia.

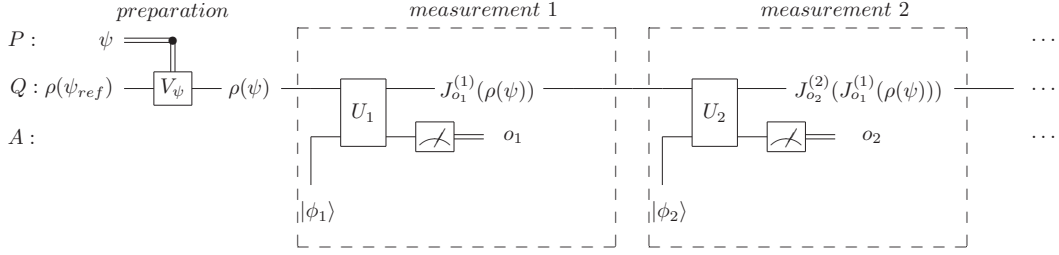
3 Viacnásobné merania kvantových systémov

3.1 Matematický popis merania

V kvantovej mechanike používame tri úrovne popisu (nedemoličného) merania: i) POVM ii) (kvantový) inštrument iii) úplný popis (model merania). Prvá z nich nám spolu s operáciou stopy umožňuje podľa Bornovho pravidla počítať pravdepodobnosti namerania výsledkov meraní podmienené stavom systému pred meraním, pričom každému výsledku je priradený pozitívny operátor. Úplný popis zahŕňa pomocný systém (merací prístroj), ktorého počiatočný stav unitárne interaguje s meraným systémom a následne je na ňom vykonané POVM. Toto POVM definované na pomocnom systéme nám v kombinácii s operáciou čiastočnej stopy (cez pomocný systém) na výslednom systéme meraného systému a meracieho prístroja dáva pravdepodobnosti nameraných výsledkov ako aj stav meraného systému po meraní. Ak nás zaujíma iba pravdepodobnosť nameraných výsledkov a transformačné pravidlo, ktorým sa mení stav meraného systému pri meraní pre každý konkrétny výsledok, potrebujeme práve popis merania na úrovni inštrumentu, ktorý je v tomto zmysle triedou ekvivalencie modelov merania.

3.2 Definícia problému

V predkladanej dizertačnej práci sa zaoberáme problémom dosiahnuteľnej konzistentnosti odhadov stavu kvantového systému, ktoré robia navzájom nezávislí pozorovatelia na základe výsledkov svojich meraní, vykonaných postupne no tom istom kvantovom systéme. Zaoberáme sa situáciou, ktorej kvantový obvod je znázornený na Obrázku 1.



Obrázok 1. Kvantový obvod znázorňujúci prípravu a sekvenciu meraní. Schéma zachytáva jednu spoločnú udalosť pozostávajúcu z postupných udalostí počiatocnej prípravy a meraní jednotlivých pozorovateľov. Čas postupuje zľava doprava. Stav na výstupe každého meracieho prístroja je normalizovaný na podmienenú pravdepodobnosť spoločnej udalosti získania výsledkov meraní $\{o_1, o_2, \dots\}$, ktoré sa udiali do momentu daného merania, podmienenú prípravou stavu $\rho(\psi)$ a konkrétnymi výbermi prístrojov $\{J^{(1)}, J^{(2)}, \dots\}$ a počiatocných stavov $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots\}$ ich pomocných systémov A .

Uvažujme systém pozostávajúci z konečného počtu elementárnych d -hladinových kvantových systémov (quditov), kolektívne nesúcich informáciu o neznámom čistom jednoquditovom stave. Na základe klasickej informácie o čistom stave $\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_d)$ je tento zakódovaný do priestoru stavov N quditov pomocou kódovania

$$\rho: \mathcal{S}(\mathcal{H}_d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_D), \quad \psi \mapsto \rho(\psi). \quad (1)$$

Pozorovatelia postupne vykonávajú merania matematicky popísané kvantovými inštrumentmi $\{J^{(1)}, J^{(2)}, \dots\}$. Ak stav na vstupe meracieho prístroja je $\hat{\rho}$, pravdepodobnosť namerania výsledku o je $\text{Tr}[J_o^{(i)}(\hat{\rho})]$ a stav na výstupe meracieho prístroja je $J_o^{(i)}(\hat{\rho}) / \text{Tr}[J_o^{(i)}(\hat{\rho})]$. Proces kódovania a výberu meracích aparátov môže byť v princípe probablistický.

Pod nezávislosťou pozorovateľov myslíme ich obmedzenú vedomosť o akciách ostatných pozorovateľov, prípadne o iných zdrojoch (napr. referenčných systémoch), ktorými môžu disponovať. Konkrétne požadujeme, že v prípade udiania sa kvantovej operácie $\$,$ dovolená vedomosť ostatných pozorovateľov o tejto operácii je limitovaná unitárnou voľnosťou $g \in SU(d)$, teda z pohľadu ostatných pozorovateľov nastali operácie $U_g \$(U_g^\dagger \hat{\rho} U_g) U_g^\dagger,$ $U_g := g^{\otimes N},$ pre všetky $g \in SU(d)$ s rovnakou pravdepodobnosťou.

Úlohou (k -teho) pozorovateľa je na základe nameraného výsledku dospieť k odhadu ψ_k skutočného zakódovaného stavu ψ . Konzistentnosť odhadu pozorovateľa meriame pomocou priemernej fidelity jeho odhadu voči skutočnému stavu:

$$F_k = \int_{\text{udalosti}} dp_k(\psi_k, \psi) f(\psi_k, \psi), \quad (2)$$

kde $f(\psi_k, \psi) = \text{Tr}[\psi_k \psi]$ je fidelita (prekryv) stavov v argumente a udalosťami sú v tomto prípade konkrétne stavy ψ_k, ψ .

2. pre výsledky nastávajúce s nenulovou pravdepodobnosťou

Matematicky je našou úlohou vyčíslit maximum

$$\mathcal{F}_k(d, N) = \max F_k(d, N), \quad (3)$$

ako aj nájst' stratégie, ktoré vedú k jeho dosiahnutiu, kde maximalizácia je cez počiatočné kódovanie a merania všetkých pozorovateľov, kompatibilné s našimi predpokladmi a s konkrétnym cieľom, ktorý sleduje každý z pozorovateľov. Cieľ bude špecifikovaný v reči podmienok pre dosahovanú konzistentnosť, F_k , pre každé $k = 1, \dots, K$.

3.3 Zjednodušenia

Pred riešením samotných problémov je výhodné odvodiť niekoľko všeobecných výsledkov, ktoré významne uľahčia ďalší postup. Analyzujeme spoločnú pravdepodobnosť z Rov. (2) z pohľadu niektorého (napr. vždy aktuálne posledného) z pozorovateľov. Analýza prebieha zapísaním spoločnej pravdepodobnosti ako integrálu cez všetky udalosti medzi voľbou kódovaného stavu ψ a urobením odhadu ψ_k , t.j. cez všetky možné kódovania, voľby meracích prístrojov, namerané výsledky a odhady pozorovateľov 1 až $k - 1$, ktoré v dôsledku obmedzenej vedomosti pozorovateľov a v dôsledku znalosti o ich snahe dosiahnuť špecifický cieľ mohli nastať. Na základe unitárnej voľnosti v povolenej znalosti kvantových operácií popisujúcich činnosť a zdroje preparátora a predošlých pozorovateľov ukazujeme, že stačí uvažovať deterministické U -kovariantné kódovania ϱ_0 , teda kódovania do U -invariantnej množiny stavov

$$\{\varrho_0(\psi_0) = U_{g_0}\varrho_0(\psi_{\text{ref}})U_{g_0}^\dagger, g_0 \in SU(d), U_{g_0} = g_0^{\otimes N}\}, \quad (4)$$

s rovnomerným pravdepodobnostným rozdelením $dp(g_0) = d\mu(g_0)$ daným Haarovou mierou v $SU(d)$. Podobne bez straty všeobecnosti stačí obmedziť sa na U -kovariantné inštrumenty, v ktorých navyše môžeme formálne nahradiť ľubovoľný výsledok merania príslušným odhadom stavu. Pracujeme potom s U -kovariantnými inštrumentami

$$\mathcal{I}: \mathcal{B} \mapsto \int_{\psi \in \mathcal{B}} \mathcal{I}_{d\psi}(\cdot) \equiv \int_{\psi \in \mathcal{B}} \tilde{\mathcal{I}}_\psi(\cdot) d\psi,$$

kde $\tilde{\mathcal{I}}$ je hustota inštrumentu \mathcal{I} a U -kovariancia má štandardný význam

$$\forall \hat{\rho} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_D), \forall g \in SU(d) \quad \tilde{\mathcal{I}}_{g\psi g^{-1}}(\hat{\rho}) = U_g \tilde{\mathcal{I}}_\psi(U_g^\dagger \hat{\rho} U_g) U_g^\dagger$$

prípadne, pre aktuálne posledného pozorovateľa, pre ktorého nás nezaujíma stav po meraní, s U -kovariantnými POVM

$$\mathcal{M}: \mathcal{B} \mapsto \int_{\psi \in \mathcal{B}} \mathcal{M}_{d\psi} \equiv \int_{\psi \in \mathcal{B}} \tilde{\mathcal{M}}_\psi d\psi,$$

kde $\widetilde{\mathcal{M}}$ je operátorová hustota POVM \mathcal{M} a U -kovariancia má štandardný význam

$$\forall g \in SU(d) \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{g\psi g^{-1}} = U_g \widetilde{\mathcal{M}}_\psi U_g^\dagger.$$

Bez preintegrovania cez odhady $\psi_1, \dots, \psi_{k-1}$ predchádzajúcich pozorovateľov dostávame výraz

$$dp(\psi_k|\psi_0) = \underbrace{\int \dots \int}_{(k-1) \text{ krát}} \text{Tr} \left[\mathcal{M}_{d\psi_k}^{(k)} \mathcal{I}_{d\psi_{k-1}}^{(k-1)} \circ \dots \circ \mathcal{I}_{d\psi_1}^{(1)}(\varrho_0(\psi_0)) \right], \quad (5)$$

prípadne po preintegrovaní cez tieto odhady výraz

$$dp(\psi_k|\psi_0) = \text{Tr} \left[\mathcal{M}_{d\psi_k}^{(k)} \chi_{k-1} \circ \dots \circ \chi_1(\varrho_0(\psi_0)) \right], \quad (6)$$

kde χ_i sú U -invariantné kanály indukované U -kovariantnými meraniami $\mathcal{I}^{(i)}$.

Rovnice (5) a (6) nám hovoria ako postupovať ďalej. Vo všeobecnosti hľadáme všetky páry kovariantných kódovanií ϱ_0 a kovariantných POVM $\mathcal{M}^{(1)}$ spĺňajúcich požadovanú vlastnosť priemernej fidelity F_1 (napr. že je maximálna možná, prípadne za dodatočných obmedzujúcich podmienok) pre invariantnú množinu stavov z Rovnice (4), s rovnomerným pravdepodobnostným rozdelením $dp(g_0) = d\mu(g_0)$. Majúc aspoň jeden taký pár $\{\varrho_0, \mathcal{M}^{(1)}\}$, môžeme vyčíslieť F_1 a dostať hodnotu fidelity s požadovanou vlastnosťou (napr. maximálnu hodnotu fidelity).

V ďalšom kroku je potrebné uvažovať pre všetky POVM $\mathcal{M}^{(1)}$ z predchádzajúceho kroku všetky $\mathcal{M}^{(1)}$ -kompatibilné kovariantné kvantové inštrumenty $\mathcal{I}^{(1)}$ a vypočítať množinu invariantných kanálov ktoré sú indukované týmito inštrumentmi. Potom je potrebné hľadať kovariantné POVM $\mathcal{M}^{(2)}$ spĺňajúce požadovanú vlastnosť priemernej fidelity F_2 pre priemerné stavy z niektorej z invariantných množín

$$\{\chi_1(\varrho_0(\psi_0)) = U_{g_0} \chi_1(\varrho_0(\psi_{\text{ref}})) U_{g_0}^\dagger, g_0 \in SU(d), U_{g_0} = g_0^{\otimes N}\},$$

s rovnomerným pravdepodobnostným rozdelením $dp(g_0) = d\mu(g_0)$, daných pôsobením všetkých kanálov χ_1 z predošlého kroku, a tak ďalej.

Úloha je podstatne zjednodušená možnosťou obmedziť sa na kovariantné prístroje (invariantné kanály). Ak by sa ukázalo, že optimálne kovariantné prístroje sú jedinečné v každom kroku, úloha sa zjednoduší ešte viac. Avšak použitie tohoto všeobecného prístupu stále vyžaduje v každom kroku spočítanie kanála indukovaného meraniami, aby bolo možné získať priemerné stavy pre optimalizáciu každého nasledujúceho merania.

Alternatívne môžeme pracovať s (optimalizovať pre) ensemble stavov

$$\{\hat{\rho}' = \mathcal{I}_{d\psi_1}^{(1)}(\hat{\rho}) / \text{Tr}[\mathcal{I}_{d\psi_1}^{(1)}(\hat{\rho})], \psi_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|, |\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_d\},$$

t.j. bez potreby počítat kanály indukované meraniami. Bolo by žiaduce aby stavy $\{\hat{\rho}'\}$ tvorili invariantnú, rovnomerne rozdelenú, množinu, čo vo všeobecnosti (slabé merania, vid' Sekciu 5) nie je ten prípad. Táto vlastnosť je splnená v prípade, že všetci pozorovatelia vykonávajú maximálne informatívne merania (vid' Sekciu 4), kedy sa ukazuje, že množina stavov $\{\hat{\rho}'\}$ je (alebo môže byť vybratá tak, aby bola) identická s, a rovnako rozdelená ako, pôvodná množina stavov $\{\varrho_0(\psi_0)\}$ (a tak ďalej pre všetkých pozorovateľov). V takom prípade je v Rov. (3) potrebné optimalizovať cez kódovania a merania a počítat optimálnu fidelitu iba raz, t.j. pre prvého pozorovateľa, nakoľko odvodíme výraz pre maximálne fidelity \mathcal{F}_i , $i > 1$, v reči (veličiny odvodené z) maximálnej fidelity \mathcal{F}_1 .

4 Maximálne informatívne merania

Ako prvou sa zaoberáme situáciou, keď každý z pozorovateľov volí stratégiu maximalizácie fidelity svojho odhadu (tento scenár nazývame aj scenárom s “chamtivými” pozorovateľmi). V tomto prípade ukazujeme, že na meranie každého pozorovateľa sa môžeme, pre každý výsledok merania (a asociovaný odhad), pozerat' ako na kanál “meraj a priprav”. Z tohoto pohľadu každý z pozorovateľov efektívne zakódováva svoj odhad pre ďalšieho pozorovateľa, nezávisle na vstupnom stave, ktorý, po jeho zmeraní, k odhadu viedol. Je to dôsledok faktu, že po maximálne informatívnom meraní výstupný stav po meraní z definície nemôže obsahovať informáciu o vstupnom stave, ktorá by už nebola obsiahnutá v realizovanom výsledku merania – inak by opakované meranie mohlo viesť k jej získaniu, čo by bolo v spore s predpokladanou maximálnou informatívnosťou pôvodného merania.

Vyššie uvedené nám umožnilo vyriešiť problém v reči maximálnej fidelity estimácie prvého pozorovateľa, \mathcal{F}_1 , bez potreby výpočtu priemerných kanálov indukovaných meraniami jednotlivých pozorovateľov a bez potreby optimalizácie merania pre priemerný stav na vstupe každého pozorovateľa. Dostávame maximálnu priemernú fidelitu odhadu k -teho pozorovateľa ako funkciu k a počtu quditov, N , kódujúcich jedno-quditový stav, ktorý má byť estimovaný:

$$\mathcal{F}_k = [1 + (d - 1)\Delta^k]/d,$$

kde $\Delta = (\mathcal{F}_1 d - 1)/(d - 1)$.

Pre všeobecné d sme sa obmedzili na prípad konečného ensemblu, teda na symetrické, alebo paralelné, kódovanie čistého quditu do priestoru stavov N quditov. V tomto prípade má operátorová hustota optimálneho kovariantného POVM na relevantnom, symetrickom, podpriestore tvar

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sym}}(\psi) = \binom{N + d - 1}{N} |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N} \quad (7)$$

kde $|\psi\rangle^{\otimes N} = (g|\psi_{\text{ref}}\rangle)^{\otimes N}$, $g \in SU(d)$, a $|\psi_{\text{ref}}\rangle \in \mathcal{H}_d$ je ľubovoľný referenčný čistý stav. Maximálna priemerná fidelita je potom daná pomocou $\Delta = N/(N + d)$, ktoré sa pre asymptoticky veľké N blíži k 1 ako $1 - d/N$.

Nakoľko pre prípad $d = 2$ je známa optimálna (maximálne informatívna) stratégia kódovania/odhadu bez obmedzenia sa na paralelné kódovanie [1], dostávame v prípade qubitov najvyššiu možnú fidelitu odhadu k -teho pozorovateľa. Je daná pomocou (pre jednoduchosť pre párne N) $\Delta = x_{N/2+1}$, kde $x_{N/2+1}$ je najväčšia nula Legendrovho polynómu $P_{N/2+1}(x)$. Asymptoticky, pre veľké N , $\Delta \cong 1 - 2\xi_0^2/N^2$, kde $\xi_0 \doteq 2.4$ je prvá nula Besselovej funkcie $J_0(x)$.

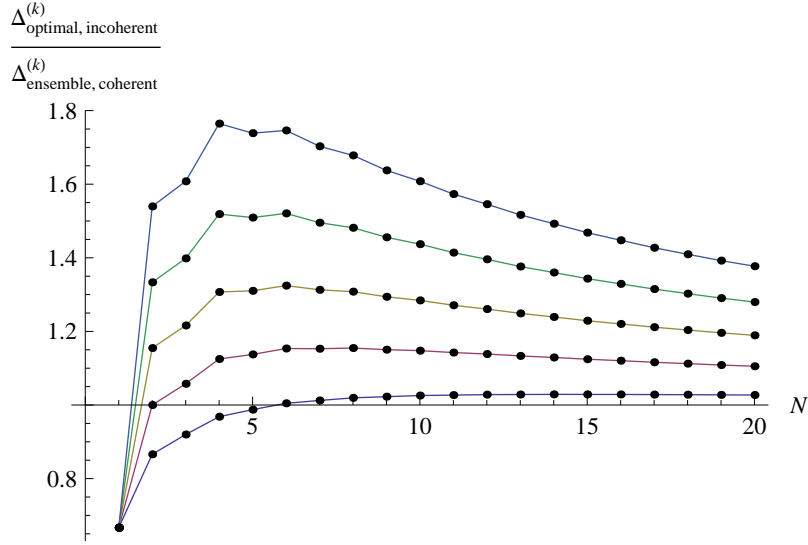
Tieto výsledky nám umožnili kvantitatívne odpovedať na otázku, ktorá bola od počiatku našou hlavnou motiváciou: ako rýchlo sa objavuje “klasická” recyklovateľnosť systému vzhľadom na jeho opakované merania, ak zväčšujeme veľkosť systému (počet jeho konštituentov), zatiaľčo počet jeho parametrov je daný počtom parametrov jedného konštituenta? Odpoveď, ktorú dostávame je taká, že pre informáciu o čistom qudite nesenú N jeho kópiami, ak $k \gg 1$ pozorovateľov má byť schopných pozorovať ten istý zakódovaný stav quditu, požaduje sa počet kópií $N \sim k^\alpha$; $\alpha > 1$. Pre čistý stav qubitu optimálne zakódovaný v priestore stavov N qubitov, stačí aby $\alpha > 1/2$, teda potrebný počet qubitov je približne odmocnina z požadovaného počtu konzistentných pozorovaní.

Či je zlepšenie v prípade optimálneho kódovania v porovnaní s kódovaním do kópií odmocninové aj pre systém quditov, pre $d > 2$, je otvorenou otázkou, ktorá je vďaka našim výsledkom zredukovaná na problém optimálneho kódovania a estimácie pre jedného pozorovateľa.

Pre systém N kópií qubitu fyzicky realizovaný ako N paralelných spinov $1/2$ nachádzame operačnú interpretáciu fidelity odhadu k -teho pozorovateľa ako pravdepodobnosť úspechu na základe merania správne identifikovať, či dodatočný systém so spinom $1/2$ bol voči týmto N spinom rovnako alebo opačne orientovaný.³ Optimálnym meraním je v tomto prípade meranie priemetu spinu na os danú odhadom $(k - 1)$ -vého pozorovateľa. Toto nám umožňuje vidieť náš (spin- $1/2$) problém ako nekoherentnú verziu (časti) problému degradácie kvantového smerového etalónu študovaného v literatúre [6, 7, 15]. Na rozdiel od posledne spomenutého, náš prístup nie je obmedzený na paralelné kódovanie, čo nám umožňuje porovnať v literatúre študovanú koherentnú stratégiu s paralelným kódovaním a našu nekoherentnú stratégiu s paralelným ako aj optimálnym kódovaním smeru. Hoci je v paralelnom prípade nekoherentná stratégia horšia ako koherentná, počínajúc šiestimi spinmi $1/2$ pre prvého pozorovateľa a viac ako jedným pre ktoréhokoľvek⁴ ďalšieho je nekoherentná stratégia s optimálnym kódovaním lepšia ako koherentná s paralelným – vid' Obrázok 2.

3. Interpretácia pre qubity, ktoré nie sú realizované ako spiny, je analogická, avšak vektor “spinu” a jeho opačná alebo rovnaká orientácia, nesúvisí so smerom v reálnom trojrozmernom priestore.

4. S výnimkou druhého merania pre dva spiny, v prípade ktorého je efektívnosť koherentnej stratégie s paralelným kódovaním a nekoherentnej s optimálnym kódovaním rovnaká.



Obrázok 2. Aká je efektívita optimálnej nekoherentnej stratégie pre N qubitov v jednotkách efektivity najlepšej koherentnej stratégie pre N kópií qubitu? “Efektívita” $\Delta^{(k)}$ kvantifikuje, na škále $\langle -1, 1 \rangle$, o koľko lepšia (alebo horšia) je daná stratégia v porovnaní s náhodným hádaním, pre ktoré $\Delta^{(k)} \equiv 0$. Rôzne farby znázorňujú, zdola nahor, $k = 1, 2, \dots, 5$. Graf je pospájaný pre lepšiu čitateľnosť. Asymptotický pomer je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\text{optimal, incoherent}}^{(k)}}{\Delta_{\text{ensemble, coherent}}^{(k)}} = 1.$$

Pravdepodobnosť úspechu v prípade našej nekoherentnej stratégie s optimálnym kódovaním poskytuje spodné ohraničenie pre pravdepodobnosť úspechu optimálnej koherentnej stratégie. Nájdenie najvyššej možnej pravdepodobnosti úspechu ako aj samotnej optimálnej koherentnej stratégie, t.j. optimálneho merania a prípadne aj kódovania, ak je odlišné od optimálneho kódovania pre nekoherentnú stratégiu, je zaujímavým problémom pre ďalší výskum.

5 Prípád slabých meraní

Ako zovšeobecnenie problému s maximálne informatívnymi meraniami všetkých pozorovateľov uvažujeme situáciu, kedy pozorovatelia vykonávajú tzv. slabé merania. Konkrétne študujeme prípad (tzv. rovnostárskych pozorovateľov), kedy K pozorovateľov dosiahne čo najvyššiu, avšak rovnakú, priemernú fidelitu odhadu a prípad, kedy každý z K pozorovateľov vykonáva rovnaké meranie, ktoré vedie k maximalizácii priemernej fidelity odhadu posledného pozorovateľa.

5.1 Rovnostárski pozorovatelia

Popisujeme protokol, v ktorom fidelita odhadu každého z pozorovateľov je čo najvyššia, ale rovnaká, teda hľadáme maximum $\mathcal{F}_k \equiv \mathcal{F}_{\text{eq}}$ (a merania, ktoré ho dosahujú) fidelity F_k za podmienok $\forall k \in \{2, \dots, K\}, F_k = F_1$. Počet pozorovateľov, K , je vopred zafixovaný a každý pozorovateľ vie svoje poradové číslo, k , v sekvencii meraní. Alternatívne si môžeme

predstaviť, že prístroj sa po meraní automaticky prestaví tak, aby bol optimálny pre ďalšieho pozorovateľa.

Ukazujeme, že v každom kroku opäť stačí obmedziť sa na (U -)kovariantné merania. Pre jeden qudit najvšeobecnejšie $SU(d)$ -kovariantné POVM má operátorovú hustotu [10]

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{(\varepsilon_k)}(\psi_k) = (1 - \varepsilon_k)\mathbb{1} + \varepsilon_k\widetilde{\mathcal{M}}(\psi_k), \quad (8)$$

kde ε_k je parameter charakterizujúci do akej miery je meranie informatívne a $\widetilde{\mathcal{M}}(\psi_k) = d|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ je operátorová hustota maximálne informatívneho kovariantného POVM \mathcal{M} . Ukazujeme, že optimálny inštrument kompatibilný s POVM (8), teda poskytujúci možnosť čo najlepšej estimácie nasledovnými pozorovateľmi, má operátorovú hustotu Krausovho operátora danú Hermitovskou odmocninou operátorovej hustoty tohoto POVM, t. j.

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\psi}^{(\varepsilon_k)} = \sqrt{1 + \varepsilon_k(d-1)}|\psi\rangle\langle\psi| + \sqrt{\frac{d-1 + \varepsilon_k(d-1)}{(d-1)}}(\mathbb{1} - |\psi\rangle\langle\psi|). \quad (9)$$

Pre jeden qudit tak merania optimálne pre našu úlohu sú totožné s meraniami najmenej narúšajúcimi meraný stav pre danú hodnotu fidelity estimácie (saturujú tzv. information-disturbance trade-off [2, 3, 9]).

Optimálne merania jednotlivých pozorovateľov sa teda líšia iba parametrom informatívnosti merania ε_k . Nájdenie explicitnej formy kanálov indukovaných takýmito optimálnymi meraniami nám umožňuje vypočítať fidelitu odhadu k -teho pozorovateľa

$$F_k = \frac{1}{d} + \frac{\varepsilon_k(d-1)}{d(d+1)} \prod_{\beta=1}^{k-1} \frac{\left[\sqrt{1 + \varepsilon_{\beta}(d-1)} + \sqrt{(d-1)(d-1 + \varepsilon_{\beta}(d-1))} \right]^2 - 1}{(d+1)(d-1)}, \quad (10)$$

kde merania jednotlivých pozorovateľov majú ľubovoľné hodnoty parametrov informatívnosti meraní, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$.

Podmienka $F_k = F_{k-1}$ vedie k rekurentnému vzťahu pre parametre informatívnosti meraní

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{\varepsilon_k(d+1)}{d-1 + (2-d)\varepsilon_k + 2\sqrt{1 + \varepsilon_k(d-1)}\sqrt{1 - \varepsilon_k}}. \quad (11)$$

Je očividné, že ak posledný pozorovateľ bude vykonávať maximálne informatívne meranie, teda $\varepsilon_K = 1$, skoršie a skoršie pozorovania budú slabšie a slabšie, nakoľko rovnako silné merania vedú k fidelite odhadu klesajúcej s rastúcim počtom pozorovaní. Pre $K \gg 1$ teda očakávame, že prvé meranie musí byť veľmi slabé, t. j. $\varepsilon \ll 1$. Taylorovým rozvojom rekurentného vzťahu v Rov. (11) dostávame diferenčnú rovnicu, ktorá je priblížením diferenciálnej rovnice, ktorej riešením je sila merania prvého pozorovateľa:

$$\varepsilon_1 \simeq \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2(d+1)}{K}} \quad (K \gg 1). \quad (12)$$

Z Rovnice (10) potom pre maximálnu, ale rovnakú, fidelitu odhadu každého z $K \gg 1$ pozorovateľov dostávame

$$\mathcal{F}_{\text{eq}}(K, d) \simeq \frac{1}{d} \left[1 + \frac{d-1}{d} \sqrt{\frac{2}{(d+1)K}} \right]. \quad (13)$$

Relevantný člen fidelity (v predošlom značený ako Δ) teda pre veľký počet pozorovateľov K klesá ako $1/\sqrt{K}$.

Pre viac kópií je situácia komplikovanejšia. Obmedzujeme sa systém N qubitov kódovaný do symetrického podpriestoru. Aj v takom prípade má všeobecné U -kovariantné POVM komplikovanejšiu štruktúru, na relevantnom, symetrickom podpriestore, parametrizovanú $d_N^{\text{sym}} - 1$ nezávislými parametrami informatívnosti merania, kde $d_N^{\text{sym}} = N + 1$ je dimenzia symetrického podpriestoru N qubitov. Bez dôkazu optimality analyzujeme prípad konvexnej kombinácie maximálne informatívneho POVM a POVM stratégie hádania s jedným parametrom informatívnosti merania a Krausových operátorov daných na symetrickom podpriestore Hermitovskou odmocninou. Naše výsledky sú v tomto prípade len dolným ohraničením \mathbb{F}_{eq} pre maximálnu, ale rovnakú, fidelitu estimácie \mathcal{F}_{eq} . Analogicky ako v prípade jednej kópie quditu dostávame rekurentný vzťah pre parameter informatívnosti meraní

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{(N+1)(N+2)\varepsilon_k}{(N+1)^2 + (N-1)(1-2\varepsilon_k) + 4\sqrt{(1-\varepsilon_k)(1+N\varepsilon_k)} - 2}. \quad (14)$$

Pre $K \gg N$ platí $\varepsilon_k \ll 1$, $k \leq k_0 \ll K$. Taylorovým rozvojom rekurentného vzťahu (14) do tretieho rádu v ε v okolí $\varepsilon = 0$ dostávame približný rekurentný vzťah

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \frac{N+1}{2(N+2)} \varepsilon_k^3, \quad (15)$$

ktorý vedie k parametru informatívnosti prvého merania

$$\varepsilon_1(K, N) \simeq \sqrt{\frac{N+2}{(N+1)K}} \quad (16)$$

a fidelite odhadov

$$\mathbb{F}_{\text{eq}}(K, N) \simeq \frac{1}{2} \left[1 + \frac{N}{\sqrt{(N+1)(N+2)K}} \right]. \quad (17)$$

Relevantný člen Δ fidelity v Rov. (17) teda pre veľký počet pozorovateľov $K \gg N$ opäť klesá ako $1/\sqrt{K}$. Pre porovnanie tzv. nekoherentná realizácia ε_k -informatívnych POVM, kedy daný pozorovateľ s pravdepodobnosťou $(1 - \varepsilon_k)$ háda a s pravdepodobnosťou ε_k meria maximálne informatívne, vedie k parametru informatívnosti prvého merania

$$\epsilon_1 = \frac{N+2}{N+2K}$$

a fidelite odhadov

$$F_{\text{eq}}(K, N) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{N}{N + 2K} \right], \quad (18)$$

teda v tomto prípade relevantný člen Δ fidelity (18) klesá pre $K \gg N$ lineárne v $1/K$.

V režime $N \gg K$ robíme Taylorov rozvoj rekurentného vzťahu (14) v okolí $1/N = 0$ do prvého rádu. Riešením takto získaného približného rekurentného vzťahu

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + 2\varepsilon_k^2/N \quad (19)$$

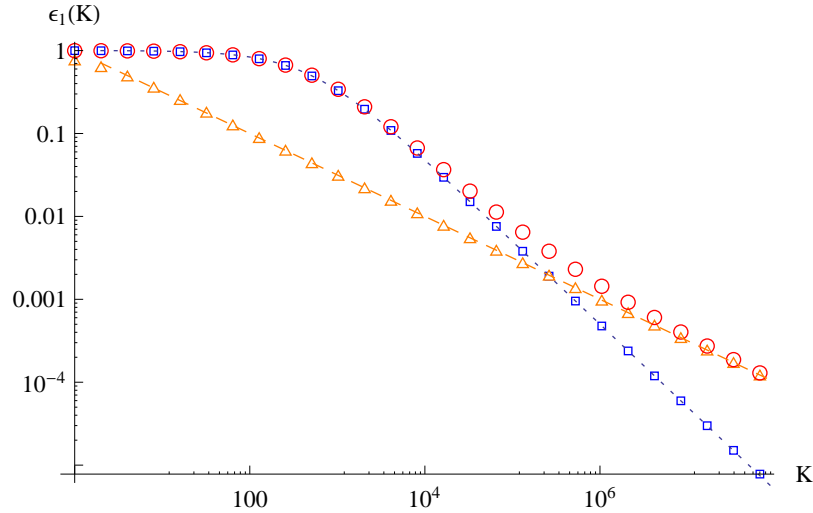
dostávame

$$\varepsilon_1(K, N) \simeq \frac{N}{N + 2(K - 1)} \quad (20)$$

a

$$\mathbb{F}_{\text{eq}}(K, N) \simeq \frac{1}{2} \left[1 + \frac{N + 2}{N + 2(K - 1)} \right].$$

Približnými metódami získané parametre informatívnosti prvého merania v režimoch $K \gg N$ a $N \gg K$ spolu s riešením presného rekurentného vzťahu (14) pre $N = 10^3$ kópií qubitu znázorňuje Obrázok 3.



Obrázok 3. Sila merania prvého pozorovateľa, ε_1 , ako funkcia počtu pozorovateľov, K . (Taktiež: sila merania k -teho pozorovateľa, $\varepsilon_k(K + 1 - k)$, ako funkcia K , $k = 1, \dots$, celá časť $[(K + 1)/2]$.) Pre simultánne zobrazenie režimu $K \gg N$ ako aj $N \gg K$ a $N \approx K$ bol zvolený počet $N = 10^3$. Obe osi sú v logaritmickej mierke. Zobrazené hodnoty – vybrané body numerického výpočtu (invertovaných) rekurentných vzťahov: presných, Rov. (14), (krúžky), približných podľa Rov. (19) (štvorčeky), približných podľa Rov. (15) (trojuholníky); riešenia dané Rov. (16) (čiarkované), Rov. (20) (bodkované).

5.2 Identické merania preferujúce posledného pozorovateľa

V druhom zovšeobecnení pôvodného problému viacnásobných meraní na prípad slabých meraní popisujeme protokol, v ktorom po K *identických* meraniach priemerná fidelita odhadu posledného pozorovateľa je maximálna možná. Vyčíslujeme optimálnu silu merania a pozorovateľmi dosiahnutú priemernú fidelitu pre prípad jednej kópie quditu a pre N kópií qubitu.

Pre jeden qudit sú medzi optimálnymi meraniami kovariantné inštrumenty dané kovariantným POVM a Krausovmi operátormi danými Hermitovskou odmocninou. Kovariantné POVM sú z jednoparametrickej množiny danej Rov. (8). Podľa Rov. (10) fidelita ($F_K = (1 + (d-1)\Delta_K)/d$) posledného pozorovateľa je determinovaná výrazom

$$\Delta_K = \frac{\varepsilon}{d+1} \left(\frac{\left[\sqrt{1 + \varepsilon(d-1)} + \sqrt{(d-1)(d-1 + \varepsilon(d-1))} \right]^2 - 1}{(d+1)(d-1)} \right)^{K-1}. \quad (21)$$

Pre $K \gg 1$ očakávame $\varepsilon \ll 1$. Taylorov rozvoj Δ_K z Rov. (21) v okolí $\varepsilon = 0$ a zachovajúc členy do tretej mocniny v ε dostávame približné Δ_K , maximum ktorého je

$$\Delta_{K,\max} \simeq \frac{4}{3d\sqrt{3(d+1)(K-1)}}; \quad (K \gg 1). \quad (22)$$

Rovnako ako v prípade rovnostárskych pozorovateľov relevantný člen Δ pre veľký počet pozorovateľov klesá ako $1/\sqrt{K}$.

Pre N kópií qubitu sa rovnako ako v prípade rovnostárskych pozorovateľov obmedzujeme na slabé merania vo forme konvexnej kombinácie maximálne informatívneho POVM a POVM stratégie hádania s jedným parametrom informatívnosti merania a Krausových operátorov daných na symetrickom podpriestore Hermitovskou odmocninou. Fidelita ($F_K = (1 + \Delta_K)/2$) posledného pozorovateľa je v tomto prípade determinovaná pomocou

$$\Delta_K = \frac{2\varepsilon}{N+2} \left(\frac{A(\varepsilon)}{N+1} \right)^{K-1}, \quad (23)$$

kde

$$A(\varepsilon) = 2ab + (N+1)a^2 + \frac{N}{N+2}b^2$$

a $a = \sqrt{1-\varepsilon}$, $b = (\sqrt{1+2j\varepsilon} - \sqrt{1-\varepsilon})$.

Pre $K \gg N$ očakávame $\varepsilon \ll 1$. Taylorov rozvoj Δ_K okolo $\varepsilon = 0$ vezmúc dva najnižšie rády ε dáva Δ_K s maximum

$$\Delta_{K,\max} \simeq \frac{2\sqrt{2}N}{3\sqrt{3(K-1)(N+1)(N+2)}}. \quad (24)$$

Opäť Δ degraduje ako $1/\sqrt{K}$.

V režime $N \gg K$ platí $\varepsilon \rightarrow 1$. V tomto prípade robíme Taylorov rozvoj Rov. (23) v premennej $(1 - \varepsilon)$ v okolí 0 a zachováme členy do prvej mocniny $(1 - \varepsilon)$. Maximalizácia dáva ε ktoré, po Taylorovom rozvoji v premennej $1/N$ v okolí 0 dáva ε vedúce k

$$\Delta_{K,\max} = 1 - \frac{2K}{N}.$$

Literatúra

- [1] E. Bagan, M. Baig, A. Brey, R. Muñoz Tapia, and R. Tarrach. Optimal encoding and decoding of a spin direction. *Phys. Rev. A*, 63(5):052309, Apr 2001.
- [2] K. Banaszek. Fidelity balance in quantum operations. *Phys. Rev. Lett.*, 86(7):1366–1369, Feb 2001.
- [3] K. Banaszek. Information gain versus state disturbance for a single qubit. *Open Systems & Information Dynamics*, 13(1):1–16, 2006.
- [4] K. Banaszek and I. Devetak. Fidelity trade-off for finite ensembles of identically prepared qubits. *Phys. Rev. A*, 64(5):052307, Oct 2001.
- [5] H. Barnum. Information-disturbance tradeoff in quantum measurement on the uniform ensemble and on the mutually unbiased bases. *arXiv:quant-ph/0205155v1*, 2002.
- [6] S. D. Bartlett, T. Rudolph, R. W. Spekkens, and P. S. Turner. Degradation of a quantum reference frame. *New Journal of Physics*, 8(4):58, 2006.
- [7] J.-C. Boileau, L. Sheridan, M. Laforest, and S. D. Bartlett. Quantum reference frames and the classification of rotationally invariant maps. *Journal of Mathematical Physics*, 49(3):032105, 2008.
- [8] C. A. Fuchs and K. Jacobs. Information-tradeoff relations for finite-strength quantum measurements. *Phys. Rev. A*, 63(6):062305, May 2001.
- [9] C. A. Fuchs and A. Peres. Quantum-state disturbance versus information gain: Uncertainty relations for quantum information. *Phys. Rev. A*, 53(4):2038–2045, Apr 1996.
- [10] A. S. Holevo. *Probabilistic And Statistical Aspects Of Quantum Theory*, volume 1 of *North-Holland Series In Statistics And Probability*. North-Holland Publishing Company, 1982.
- [11] D. Kretschmann, D. Schlingemann, and R. F. Werner. The information-disturbance tradeoff and the continuity of stinespring’s representation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 54(4):1708–1717, March 2008.

- [12] J. Ladislav Mišta and J. Fiurášek. Optimal partial estimation of quantum states from several copies. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 74(2):022316, 2006.
- [13] L. Maccone. Entropic information-disturbance tradeoff. *Europhysics Letters*, 4(77):4002, Feb 2007.
- [14] L. Mišta. Minimal disturbance measurement for coherent states is non-gaussian. *Phys. Rev. A*, 73(3):032335, Mar 2006.
- [15] D. Poulin and J. Yard. Dynamics of a quantum reference frame. *New Journal of Physics*, 9(5):156, 2007.

6 Zoznam publikácií

1. M. Koniorczyk, **P. Rapčan**, and V. Bužek.
Direct versus measurement-assisted bipartite entanglement in multiqubit systems and their dynamical generation in spin systems.
Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics), 72(2):022321, 2005.
2. M. Koniorczyk, Á. Varga, **P. Rapčan**, and V. Bužek.
Quantum homogenization and state randomization in semiquantal spin systems.
Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics), 77(5):052106, 2008.
3. **P. Rapčan**, J. Calsamiglia, R. Muñoz-Tapia, E. Bagan, and V. Bužek.
Recycling of qubits.
Physica Scripta, 2010(T140):014059, 2010.
4. S. Olivares, M. Sedlák, **P. Rapčan**, M. G. A. Paris, V. Bužek.
Optimal unambiguous comparison of two unknown squeezed vacua.
arXiv:1010.2937 [quant-ph], manuskript prijatý na publikovanie vo *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*.
5. **P. Rapčan**, J. Calsamiglia, R. Muñoz-Tapia, E. Bagan, and V. Bužek.
Scavenging of quantum information.
manuskript v príprave.

7 Zoznam citácií

M. Koniorczyk, **P. Rapčan**, and V. Bužek

Direct versus measurement-assisted bipartite entanglement in multiqubit systems and their dynamical generation in spin systems.

Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics), 72(2):022321, 2005.

1. G. Tóth and O. Gühne. Detection of multipartite entanglement with two-body correlations. *Applied Physics B: Lasers and Optics*, 82:237–241, 2006. 10.1007/s00340-005-2057-1.
2. O. Kálmán, P. Földi, and M. G. Benedict. Quantum and classical correlations of spatial and spin degrees of freedom in quantum rings. *Open Systems Information Dynamics*, 13(4):455 – 462, 2006.
3. F. Palumbo, A. Napoli, and A. Messina. Quantum correlations in a generalized spin star system. *Open Systems Information Dynamics*, 13(3):309 – 314, 2006.
4. D. Burgarth and S. Bose. Universal destabilization and slowing of spin-transfer functions by a bath of spins. *Phys. Rev. A*, 73(6):062321, Jun 2006.
5. O. Gühne and G. Tóth. Energy and multipartite entanglement in multidimensional and frustrated spin models. *Phys. Rev. A*, 73(5):052319, May 2006.
6. J. Karthik, A. Sharma, and A. Lakshminarayan. Entanglement, avoided crossings, and quantum chaos in an ising model with a tilted magnetic field. *Phys. Rev. A*, 75(2):022304, Feb 2007.
7. R. Rossignoli and C. T. Schmiegelow. Entanglement generation resonances in XY chains. *Phys. Rev. A*, 75(1):012320, Jan 2007.
8. D. G. Angelakis and A. Kay. Weaving light-matter qubits into a one way quantum computer. *New Journal of Physics*, 10(2):023012, 2008.
9. L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral. Entanglement in many-body systems. *Rev. Mod. Phys.*, 80(2):517–576, May 2008.
10. M. Koniorczyk, Á. Varga, P. Rapčan, and V. Bužek. Quantum homogenization and state randomization in semiquantal spin systems. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 77(5):052106, 2008.

M. Koniorczyk, Á. Varga, **P. Rapčan**, and V. Bužek

Quantum homogenization and state randomization in semiquantal spin systems.

Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics), 77(5):052106, 2008.

1. G. Gennaro, G. Benenti, and G. M. Palma. Relaxation due to random collisions with a many-qudit environment. *Phys. Rev. A*, 79(2):022105, Feb 2009.

8 Príspevky na konferenciách

1. **P. Rapčan**
Dynamics of entanglement in small spin rings (prednáška)
Young European Physicists Meeting, Budmerice, SR, 2004.
2. M. Koniorczyk, **P. Rapčan**, and V. Bužek
Direct versus measurement-assisted bipartite entanglement in multiqubit systems (prednáška na letnej škole). *Dynamical generation of direct and measurement-assisted bipartite entanglement in spin systems* (poster na konferencii).
International Summer School and Conference on Quantum Information, Drážďany, Nemecko, 2005.
3. M. Koniorczyk, **P. Rapčan**, and V. Bužek
Direct and measurement assisted bipartite entanglement in multi-qubit systems (prednáška)
2nd Central European Quantum Information Processing Workshop, Znojmo, ČR, 2005.
4. **P. Rapčan**, and V. Bužek
Sequential quantum measurements of direction (prednáška)
4th Central European Quantum Information Processing Workshop, Valtice, ČR, 2007.
5. M. Koniorczyk, Á. Varga, **P. Rapčan**, and V. Bužek
Quantum homogenization and state randomization in semiquantal spin systems (poster)
5th Central European Quantum Information Processing Workshop, Telč, ČR, 2008.
6. **P. Rapčan**, J. Calsamiglia, R. Muñoz-Tapia, E. Bagan, and V. Bužek
Recycling of quantum information (poster)
16th Central European Workshop on Quantum Optics, Turku, Fínsko, 2009.
7. **P. Rapčan**, J. Calsamiglia, R. Muñoz-Tapia, E. Bagan, and V. Bužek
Recycling of quantum information (prednáška)
6th Central European Quantum Information Processing Workshop, Jindřichův Hradec, ČR, 2009.
8. S. Olivares, M. Sedlák, **P. Rapčan**, M. G. A. Paris, V. Bužek
Unambiguous comparison of squeezed vacua (prednáška)
7th Central European Quantum Information Processing Workshop, Valtice, ČR, 2010.

9 Summary

The aim of the present Thesis is to provide an insight into the problem of emergence of classical features within a quantum description of physical systems. Specifically, we focus on a property of classical systems that they are observable, in principle, by as many careful independent observers as one wishes, in a consistent manner; that is all who observe the physical system are able to obtain essentially the same value of an observable.

Motivated by a previously studied problem of repeated use of quantum clocks, i.e. repeated estimation of a state of a (dynamically evolving) phase reference, we in particular consider a natural generalization thereof, namely repeated estimation of a quantum directional reference, or a “quantum gyroscope” – a single spin-1/2 pure state carried collectively by, or encoded into, a collection of N spin-1/2 systems. Dropping the requirement that physically the two-level systems be realized by spins we arrive at a problem directly generalizable to that of repeated estimation of a pure single-qudit state encoded in the state space of N qudits.

After having introduced the basic mathematical tools relevant for the rest of the Thesis, we collect the common knowledge on optimal extraction of information from families of signal states that are invariant under operations from the representation space of a symmetry group. Then the main research program of the Thesis is presented.

We begin our analysis by explicitly showing that due to the limitations on resources allowed to be in possession of the observers we may restrict our attention to encodings and measurement apparatus which are covariant with respect to the $g \mapsto g^{\otimes N}$ representation of $SU(d)$. Subsequently we consider two scenarios.

In the first one, which we refer to as “greedy” scenario, each of the observers, wishing to access the single-qudit information, proceed so that the fidelity of his estimate is maximized. We show that in such a case each observer’s measurement can be viewed, for each outcome, as a measure and prepare channel. From this point of view, each observer effectively encodes his estimate for the next one, irrespective of his input state. The above enables us to solve the problem in terms of the first observer’s estimation fidelity, without the need to calculate the average channels induced by the measurements and without a measurement optimization for each observer’s average input state. Applying this result, we manage to express a k th observer’s maximal average fidelity as a function of k and of the number of qudits, N , encoding the single-qudit to estimate, namely $\mathcal{F}_k = [1 + (d - 1)\Delta^k]/d$, where $\Delta = (\mathcal{F}_1 d - 1)/(d - 1)$.

For general d we restrict ourselves to the finite ensemble case, i.e., symmetric, or parallel, encoding of a pure qudit into the state space of N qudits. The maximal average fidelity in this case is determined by $\Delta = N/(N + d)$ which, asymptotically, for large N , approaches 1 as $1 - d/N$. Since for $d = 2$ an optimal strategy without the parallel-encoding restriction is known, we are in position to evaluate the best achievable fidelity of a k th observer’s estimate in the qubit case. It is determined by $\Delta = x_{N/2+1}$, where $x_{N/2+1}$ is the largest zero of the Legendre polynomial $P_{N/2+1}(x)$. Asymptotically, for large N , $\Delta \cong 1 - 2\xi_0^2/N^2$, where $\xi_0 \doteq 2.4$ is the first zero of the Bessel function $J_0(x)$.

These results enable us to make quantitative conclusions about the question that has motivated us from the beginning: how fast does the classical-like recyclability with respect to observations arise when the size, i.e., the number of constituents, of the system is increased while the number of parameters of the system is given by the number of parameters of a single constituent? The answer we give is that, for a pure-qudit information carried by N parallel qudits, should $k \gg 1$ observers all observe the same encoded qudit state it is required that $N \sim k^\alpha$; $\alpha > 1$. For a pure qubit encoded in N qubit instances optimally, $\alpha > 1/2$, i.e., only a size square root of the number of observations, is required for a system of qubits to be recyclable as if classical. Whether the enhancement that occurs for an optimal encoding, as compared to the parallel encoding is a square-root, or some other, one in the case of qudits is an open question. Due to our results, this question has been reduced to the problem of optimal single-observer covariant encoding/estimation.

For qubit systems realized by spin-1/2s we find a clear operational interpretation of the estimation fidelity of a k th observer as the success probability of correctly identifying, via performing a spin-projection measurement onto the axis given by the $(k - 1)$ th observer's estimate, that an additional qubit, aligned or anti-aligned with respect to the encoded qubit state, has been aligned or anti-aligned, respectively.⁵ This enables us to see our (spins-1/2) problem as an incoherent-strategy version of the (part of the) problem of degradation of a quantum directional reference, previously studied in literature. Unlike the latter, our approach is not limited to the parallel encoding, which enabled us to compare the previously studied, coherent, strategy with parallel encoding to an incoherent one with both parallel and optimal direction encoding. Though inferior for the parallel case, the incoherent strategy for the optimal encoding is superior to the coherent parallel one, starting from six spin-1/2s for the first observation and for more than one spin for any⁶ successive observation. The success probability of our incoherent strategy with the optimal encoding provides a lower bound on that of a coherent one. Finding the highest possible success probability and the optimal coherent strategy itself, i.e., optimal measurements, is an interesting problem for future research.

In the second scenario we consider a generalization of the first one, to include situations where the observers optimize their measurements to pursue goals different from, in the first place, mere maximization of the quality of their own guesses. In particular, we study the case where K observers estimate the encoded qudit state with equal, but maximal, fidelity (equalitarian strategy) and the case where the observers use the same measurement apparatus such that the quality of the last observer's estimate is maximized. In both cases the measurements performed are weak, i.e., in general not extracting all of the extractable information which enabled less disturbance to be undergone by the measured state. In the former case we quantify how the measurements approach more and more the ones from the "greedy" scenario with increasing tally number, k , until the last observer performs a "greedy" measurement as well as the maximal achievable, equal, fidelity of the observers'

5. The interpretation for qubits which are not realized as spins is analogous only the "spin" vector, and thus the (anti-)alignment, does not correspond to a direction in real three-dimensional space.

6. With the exception of the second observation and two spins, in which case the performance of the coherent strategy with parallel encoding is identical to that of the incoherent strategy with the optimal encoding.

guesses. In the latter case we show there exists, and we calculate, the optimal “strength” of the measurement to be performed by all the observers as well as the observers’ fidelities achieved.