Východ a západ Slnka

Daniel Reitzner

12. februára 2007

Je všeobecne známe, že v našich zemepisných šírkach dĺžka dňa závisí od ročného obdobia. Treba však o čosi viac pozornosti na to, aby si človek všimol, že toto predlžovanie/skracovanie dní nenastáva symetricky. Napríklad v období Vianoc po zimnom slnovrate Slnko ešte stále vychádza neskôr a neskôr avšak deň sa už predlžuje. Aby sme lepšie pochopili podstatu tohoto javu, vytvorili sme najprv numerickú simuláciu.

1 Numerická simulácia

Pri simulácii postupujeme tak, že v každý sledovaný okamih určíme polohu daného bodu v karteziánskej sústave so stredom v Slnku, pričom naviac uvažujeme, že obežná dráha Zeme okolo Slnka je kruhová[1]. V takomto prípade postupujeme nasledovne.

Rotácia Zeme. Musí byť taká, aby po polroku nenastalo to, že poludnie bude v noci a polnoc cez deň. Toto by platilo, ak by Zem za jeden deň zrotovala o uhol 2π. Preto Zem za jeden deň vykoná rotáciu o čosi väčšiu. Konkrétne $2\pi + \frac{2\pi}{N}$, kde $N \doteq 365{,}245$ je počet dní v roku[2].

Poloha Zeme voči Slnku. Je daná uhlom $\beta = 2\pi\frac{t}{N}$, kde t určuje deň. Pomocou tohto uhla potom poloha Zeme voči Slnku je

$$O = [R\cos\beta, R\sin\beta, 0],$$

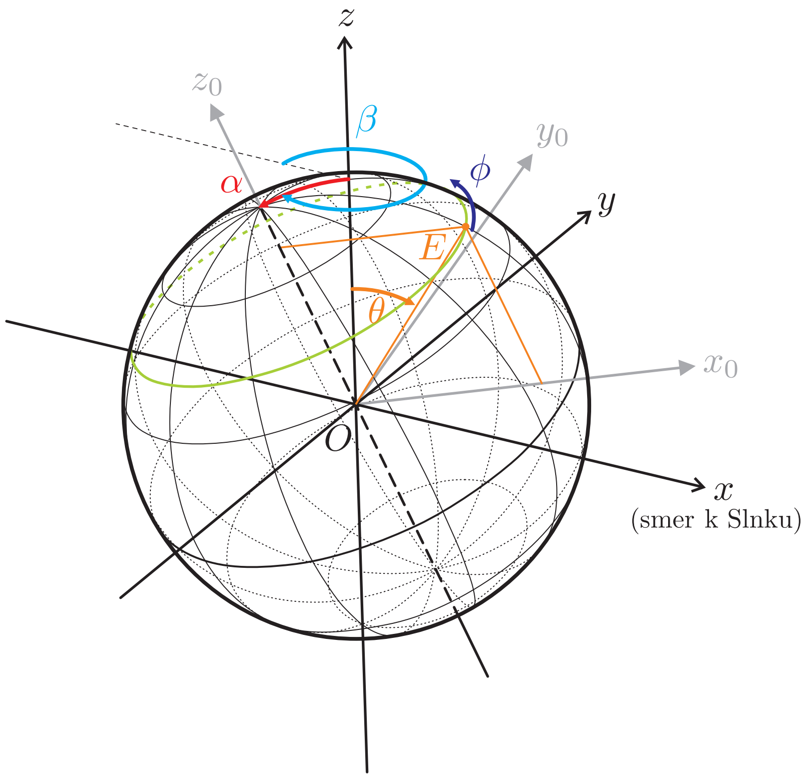
kde $R \doteq 150\,\mathrm{mil\,km}$ je vzdialenosť Zeme od Slnka a súradnicová sústava je zvolená tak, že Zem obieha okolo Slnka v kladnom smere a obeh prebieha len v rovine xy, pričom ak je Zem v bode R uvažujeme, že je práve deň zimného slnovratu. To ale znamená, že sklon Zemskej osi voči zvislej polohe (v smere osi z) je prevedený rotáciou okolo osi y.

Poloha zvoleného bodu. Je teraz určená parametrami β — uhlom definujúcim obeh Zeme okolo Slnka, $\alpha = 23{,}5^\circ$ — sklonom Zemskej osi voči zvislej polohe, θ — zemepisnou šírkou pozorovateľa a ϕ — uhlom určujúcim rotáciu Zeme. Keďže v zvolenej súradnicovej sústave je natočenie Zemskej osi v istom priblížení prakticky rovnaké, v simulácii teda môžeme postupovať tak, že v súradnicovej sústave zo stredom v strede Zeme za pomoci θ, β a ϕ majúc na pamäti predchádzajúce poznámky určíme polohu bodu na nenaklonenej sfére

$$\mathbf{r}' = (R_\oslash \cos\omega\cos\theta, R_\oslash \sin\omega\cos\theta, R_\oslash \sin\theta),$$

[1] Toto priblíženie na sledované javy nemá významný vplyv.

[2] V ďalšom budeme predpokladať, že smer rotácie Zeme je súhlasný so smerom obehu Zeme okolo Slnka — obidva sú kladné.



Obrázok 1: Znázornenie situácie skúmanej analyticky.

kde $R_\oslash \doteq 6378\,\mathrm{km}$ je polomer Zeme a následne tento bod zrotujeme okolo osy y o uhol α. Tejto rotácii potom zodpovedá matica

$$\mathbf{T}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Poloha daného bodu voči stredu Zeme je tak daná vzťahom

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}_y(\alpha) \cdot \mathbf{r}'$$

a vzhľadom k Slnku má zvolený bod polohu (smerový vektor)

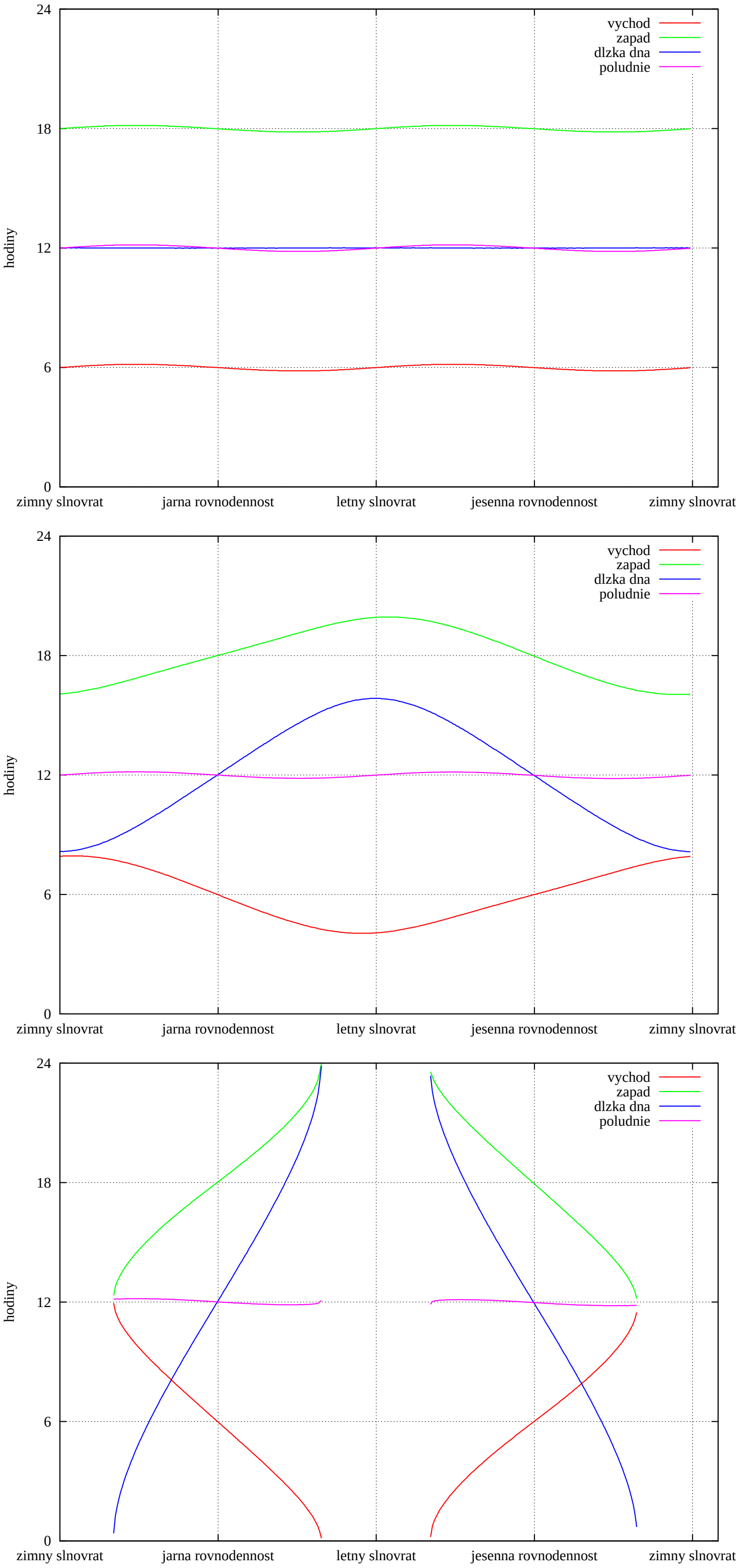
$$\mathbf{R} = \mathbf{O} + \mathbf{r}.$$

Východ a západ Slnka. Určujeme ako čas, kedy dopadnú lúče Slnka na daný bod prvýkrát/poslednýkrát cez deň. Týmito bodmi sú tie, v ktorých je spojnica Slnko–zvolený bod dotyčnicou k Zemskému povrchu a teda sú to body, v ktorých vektory $\mathbf{r}$ a $\mathbf{R}$ sú na seba kolmé. Vtedy platí:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = 0.$$

2 Výsledky a analytický výpočet

Ak predošlé využijeme v numerickej simulácii, získame výsledky v dobrej zhode s pozorovaním. Tieto výsledky sú znázornené na obrázku 2 pre rôzne zemepisné šírky.



Obrázok 2: Východ (zelená) a západ (modrá) slnka, dĺžka dňa (fialová) a poludnie (tyrkysová) v závislosti na dni počas roka. Hore je zobrazená situácia pre zemepisnú šírku 0°, v strede sje situácia pre našu zemepisnú šírku (48°) a dole je situácia za polárnym kruhom pre zemepisnú šírku 70°.

Získané výsledky si zhrnieme za pomoci analytického výpočtu. Najprv si ale zvolíme inú súradnicovú sústavu (viď. obr. 1), v ktroej pohyb okolo Slnka bude nahradený rotáciou Zemskej osi okolo osi z. Slnko v tejto sústave ostáva vždy na jednom mieste. Výpočet prevádzame tak, že polohu bodu určíme najprv na nezrotovanej sfére, t.j. v súradnicovej sústave pevne spojenej s osou Zeme. Vtedy bude poloha bodu určená vektorom

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} R_\oslash \cos\phi \sin\theta \\ R_\oslash \sin\phi \sin\theta \\ R_\oslash \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Naklonenie Zemskej osi voči zvislému smeru bude následne reprezentované rotáciou (1) o uhol $-\alpha$, keďže voči predchádzajúcemu prípadu sa zmenila orientácia osi x. Táto rotácia je následne spojená s rotáciou sféry okolo osi z o uhol β. Opäť vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu a vzhľadom na to, že ak je obeh Zeme okolo Slnka v kladnom smere, v tejto súradnicovej sústave bude zemská os rotovať v zápornom smere, čo je spojené s rotáciou súradnicovej sústavy v kladnom smere. Pritom matica reprezentujúca túto rotáciu má tvar

$$\mathbf{T}_z(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teraz poloha zvoleného bodu bude daná vektorom $\mathbf{e}$, ktorý je daný rovnosťou

$$\mathbf{e} = \mathbf{T}_z(\beta)\mathbf{T}_y(-\alpha)\mathbf{e}_0. \tag{2}$$

Pozrime sa teraz bližšie na charakteristiky zobrazené na obrázku 2 získaného simuláciou.

Poludnie. Z obrázka 2 vidíme, že nezávisle od zemepisnej šírky poludnie nie je vždy o 12-tej hodine, ale okolo nej periodicky osciluje. Bližším porovnaním jednotlivých výsledkov zistíme, že táto závislosť je rovnaká pre všetky zemepisné šírky. Ako to vyzerá, ak sa situáciu snažíme zistiť analyticky?

Poludnie je čas počas dňa, kedy je Slnko na oblohe najvyššie. Je očividné aj ďalšie tvrdenie, východ a západ Slnka sú voči tomuto bodu položené symetricky. Platí ešte aj ďalšie tvrdenie: smerový vektor

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{e}$$

zvoleného bodu E od Slnka má zo smerovým vektorom $\mathbf{e}$ zvoleného bodu E od stredu Zeme maximálny skalárny súčin $\mathbf{l} \cdot \mathbf{e} = Re_x + R_\oslash^2$, kde e_x je x-ová zložka vektora $\mathbf{e}$ daného vzťahom (2), t.j.

$$e_x = R_\oslash \cos\phi \sin\theta \cos\alpha \cos\beta + R_\oslash \sin\phi \sin\theta \sin\beta - R_\oslash \cos\theta \sin\alpha \cos\beta.$$

Maximum nájdeme za pomoci derivácie, teda poludnie je v taký čas ϕ, kedy je splnená podmienka

$$\frac{\partial(\mathbf{l} \cdot \mathbf{e})}{\partial\phi} = 0.$$

Dosadením do predchádzajúceho vzťahu získame takto podmienku

$$\frac{\partial e_x}{\partial\phi} = 0.$$

Následným výpočtom dostávame vzťah

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{1}{\cos\alpha} \operatorname{tg}\beta.$$

Teraz je vhodné si uvedomiť, že rotácia sféry o uhol β nezmenila len pozíciu Zemskej osi, ale zrotovala celú sféru a tým pádom ϕ nie je uhol určujúci čas počas dňa. Týmto uhlom je ψ, ktorý je s ϕ spojený vzťahom

$$\phi = \psi + \beta.$$

Preto

$$\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}(\psi + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\psi} = \frac{1}{\cos\alpha}\operatorname{tg}\beta.$$

Odtiaľ triviálne

$$\operatorname{tg}\psi = \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\frac{\operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta}.$$

A keďže

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1}{2}\sin 2\beta,$$

dostávame

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\sin 2\beta. \tag{3}$$

Pre malé x platí $\operatorname{arctg} x \approx x$ a keďže v (3) je pravá strana malá ($< 0{,}046$), môžeme písať

$$\psi \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\sin 2\beta + \pi,$$

kde π bola pridaná perióda, aby sme dostali poludnie a nie polnoc. Čas p, kedy nastáva poludnie teraz vyjadríme teraz jednoducho vzťahom $p = 24\psi/(2\pi)$ a teda

$$p = 12 + \lambda_0 \sin\left(\frac{4\pi t}{N}\right),$$

kde β bolo vyjadrené za pomoci dňa počas roku t a kde

$$\lambda_0 = \frac{6}{\pi}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \doteq 0{,}172.$$

Výsledky simulácie (fit na dátach) dávajú túto hodnotu $\lambda_0^{\mathrm{sim}} = 0{,}164$.

Dĺžka dňa. Analytické vyjadrenie dĺžky dňa je rozpracované v [1] — tieto výsledky sú zhrnuté v dodatku A. Budeme teda vychádzať z výsledku pre dĺžku dňa v tvare

$$d = \min\left\{24, \max\left\{0, \delta\right\}\right\}, \tag{4}$$

kde

$$\delta = \frac{24}{\pi}\arccos\left\{\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\left[\alpha\cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right)\right]\right\}. \tag{5}$$

Vzorce (4) a (5) vyjadrujú veľmi dobre dĺžku dňa aj za polárnym kruhom. My sa však teraz pokúsime o ich zjednodušenie, ktoré prevedieme pre malé θ (ako uvidíme z tabuľky 1, toto je dôležitý predpoklad).

$\theta[°]$	λ	$\lambda^{\rm sim}$	χ^2	$\Delta[\%]$
10	0,552	0,574	$1{,}4 \times 10^{-4}$	3,8
20	1,140	1,186	$4{,}8 \times 10^{-4}$	4,0
30	1,809	1,889	$1{,}3 \times 10^{-3}$	4,4
40	2,629	2,772	$3{,}4 \times 10^{-3}$	5,5
50	3,734	4,013	$1{,}1 \times 10^{-2}$	7,5
60	5,427	6,136	$5{,}9 \times 10^{-2}$	13,1

Tabuľka 1: Výsledky teoretických hodnôt λ pre rôzne zemepisné šírky θ v porovnaní s hodnotami $\lambda^{\rm sim}$ získanými fitovaním dát. Vypísané sú aj hodnoty redukovaného χ^2 fitu a relatívna odchýlka výsledkov.

V takomto prípade máme $d = \delta$ a aj vúraz v zátvorkách $\{\ldots\}$ je malý. Naviac môžeme aproximovať $\operatorname{tg}(\alpha \cos\beta) \approx \alpha\cos\beta$ a keďže pre malé x je $\arccos x \approx \frac{\pi}{2} - x$, zo vzťahov (4) a (5) dostávame

$$d = 12 - \lambda \cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right),$$

kde

$$\lambda = \frac{24\alpha \operatorname{tg}\theta}{\pi}.$$

V tabuľke 1 sú zapísané výsledky teoretických hodnôt λ pre rôzne zemepisné šírky θ v porovnaní s hodnotami $\lambda^{\rm sim}$ získanými fitovaním dát. Vidíme, že tieto výsledky platia ozaj len pre malé θ.

Východ a západ Slnka. Z predošlého výkladu vieme, že dĺžku dňa aj poludnie môžeme tiež vyjadriť pomocou vzťahov $d = v - r$ a $p = (v + r)/2$, kde v je čas západu Slnka a r je čas jeho východu. Preto platí

$$r = p - \frac{d}{2} = 6 + \lambda_0 \sin\left(\frac{4\pi t}{N}\right) + \frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right),$$
$$v = p + \frac{d}{2} = 18 + \lambda_0 \sin\left(\frac{4\pi t}{N}\right) - \frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right).$$

Tieto závislosti majú takú vlastnosť, čo sme spomínali aj na začiatku, že extrémy týchto funkcií nie sú v rovnaký čas t. Inými slovami, Slnko v okolí zimného slnovratu ešte stále vychádza každý deň neskôr, kdežto dni sa už predlžujú. To sa dá ukázať nasledovnou úvahou. Keďže v okolí zimného slnovratu nadobúdajú funkcie r a v extrém, musí platiť

$$\frac{\mathrm{d}\, r}{\mathrm{d}\, t} = 0.$$

To platí ale len vtedy, keď je splnená rovnosť

$$\sin^2\beta + \frac{\lambda}{8\lambda_0}\sin\beta + 4\lambda_0 = 0.$$

Táto kvadratická funkcia pre premennú $\sin\beta$ má len jedno riešenie z intervalu $\langle -1; 1\rangle$ a to $\sin\beta = 0{,}185$. V okolí zimného slnovratu berieme β blízke nule a tak riešením je $t_r \sim 11$.

Podobne dosiahne me aj výsledok pre v, kedy s prihliadnutím na ročnú periódu rovnakým postupom vyjde $t_v \sim 354$. Vzdialenosť týchto extrémov je takto 22 dní a vidíme, že vzhľadom na lokálny čas v bode E sa východ a západ Slnka nesprávajú symetricky, čo je dôsledok jedine toho, že poludnie nenastáva vždy o dvanástej. Porovnaním zo simuláciou vidíme, že aj tam nastáva tento efekt, kedy $t_r^{\rm sim} \sim 8$ a $t_v^{\rm sim} \sim 357$ a teda extrémy sú od seba vzdialené 16 dní.

Bez aproximácií. Na záver ešte uvedieme výsledky, ak nepoužívame aproximácie. V takomto prípade platí

$$p = \frac{24}{2\pi} \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\sin\left(\frac{4\pi t}{N}\right)\right],$$
$$d = \frac{24}{\pi} \arccos\left\{\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\left[\alpha\cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right)\right]\right\},$$
$$r = p - \frac{d}{2} \qquad v = p + \frac{d}{2}.$$

Použitím týchto vzťahov sme získali závislosti zobrazené na obrázku 3. Vidíme veľmi dobrú zhodu teoretických výsledkov a simulácie.

A Glarnerov výpočet dĺžky dňa

Toto odvodenie je založené na určení pomeru viditeľnej časti obežnej dráhy Slnka ku celkovej dráhe na nebeskej sfére. Znázornené je to na obrázku 4. Východzou veličinou je ζ — uhol medzi rovinou pozorovateľa (Zemský povrch) a zenitom Slnka (najvyšší bod, ktorý dosiahne Slnko pri obehu. Platí

$$\zeta = \frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right).$$

Konštanta $\pi/2$ pochádza z požiadavky, aby keď neuvaŭjeme sklon osi α pri $\theta = 0$ prechádzalo Slnko nadhlavníkom ($\zeta = \pi/2$), resp. na póloch aby $\zeta = 0$. Sklon Zemskej osi je započítaný v treťom člene tak, aby pri $t = 0$ (zimný slnovrat) bolo ζ minimálne.

Uhol ν medzi stredom obežnej dráhy Slnka a jeho zenitom ako ho vním pozorovateľ je potom daný vzťahom

$$\nu = \zeta + \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha\cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right).$$

Potom vzdialenosť pozorovateľa od zenitu je pri $r = 1$ rovná

$$v = \frac{1}{\sin\nu}.$$

Teraz vzdialenosť medzi pozorovateľom a stredom obežnej dráhy Slnka je

$$f = v\cos\nu = \operatorname{cotg}\nu.$$

Pomocou f teraz vieme vyjadriť viditeľnú časť spojnice zenitu a stredu obežnej dráhy Slnka zo vzťahu

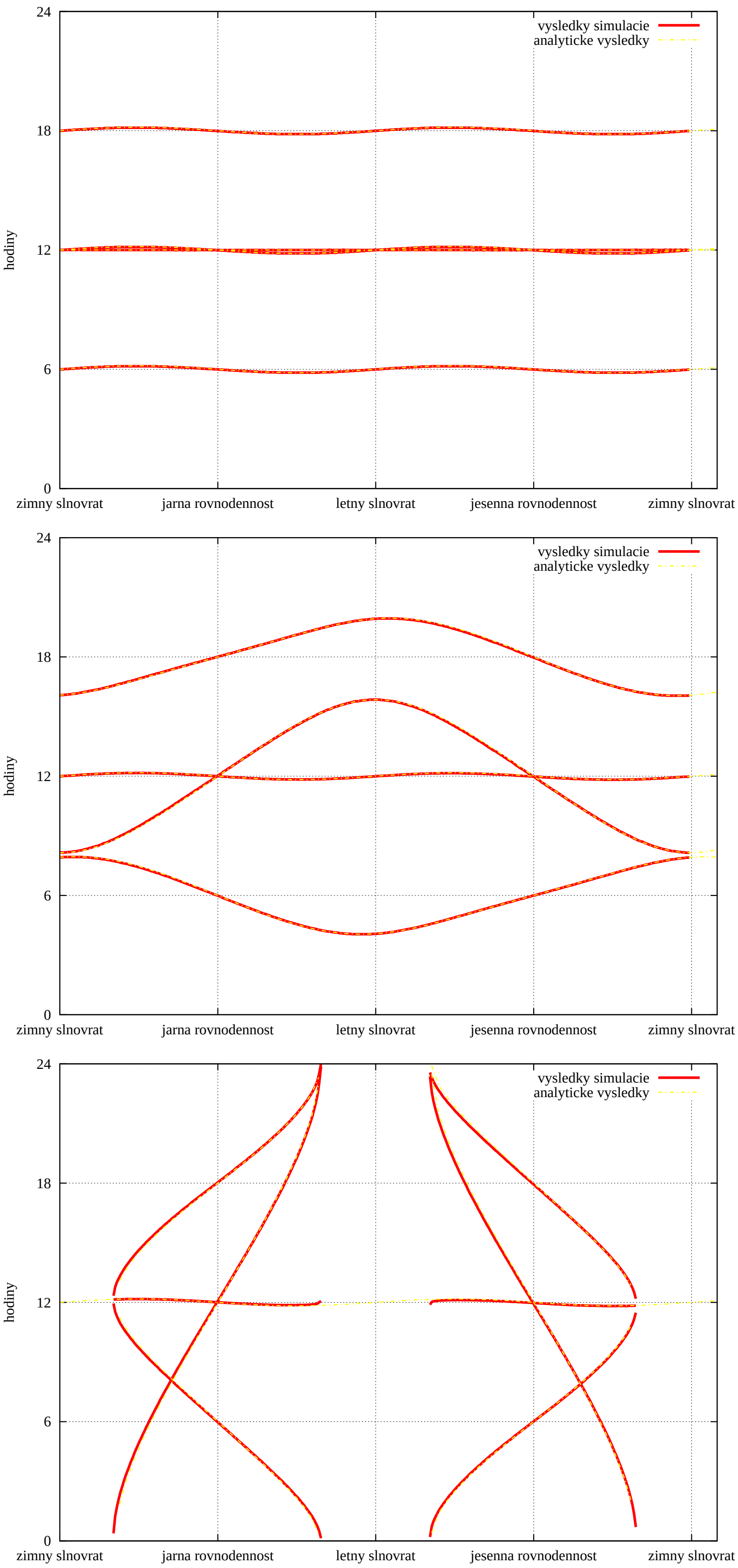
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r - m}{f} \Rightarrow m = 1 - f\operatorname{tg}\theta$$

odkiaľ pre uhol γ určujúci polovicu viditeľnej časti obežnej dráhy Slnka dostávame

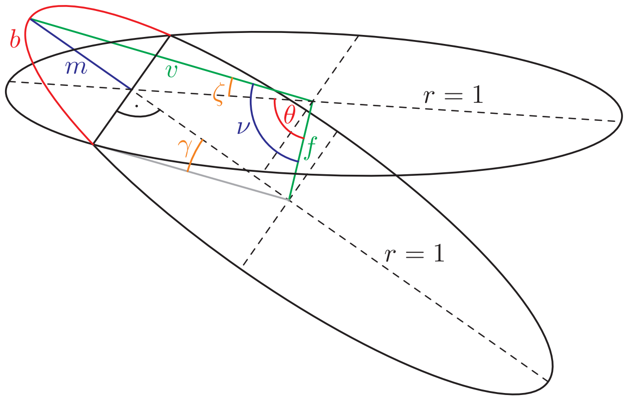
$$\cos\gamma = \frac{1 - m}{r} \Rightarrow \gamma = \arccos(f\operatorname{tg}\theta).$$

Teraz už ľahko vyjadríme viditeľnú časť obežnej dráhy Slnka

$$b = \frac{2\gamma}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\arccos(f\operatorname{tg}\theta)$$



Obrázok 3: Porovnanie teoretických výsledkov (žlté bodko-čiarkované) a výsledkov simulácií (hrubá červená) pre rôzne zemepisné šírky (0° hore, 48° v strede a 70° dole). Vidíme ich dobrý súhlas.



Obrázok 4: Situácia použitá pri výpočte dĺžky dňa. Vodorovná elipsa znázorňuje rovinu pozorovateľa a šikmá elipsa znázorňuje obežnú dráhu Slnka na nebeskej sfére.

odkiaľ pre dĺžku dňa dostávame vzťah

$$\delta = 24b = \frac{24}{\pi} \arccos\left\{\operatorname{tg}\theta \operatorname{cotg}\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right)\right]\right\}.$$

Keďže platí,že

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = \operatorname{tg}\mu,$$

dostávame vzťah (5)

$$\delta = \frac{24}{\pi} \arccos\left\{\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\left[\alpha\cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right)\right]\right\}.$$

Pritom nesmieme zabúdať na to, že dĺžka dňa je väčšia než 0 hodín a menšia než 24 hodín a preto je nutné zaviesť ešte podmienku (4).

Referencie

[1] Glarner's website: `http://herbert.wikispaces.com/Length+of+Day`