

S. Mockovčiak, P. Baláž, D. Reitzner, M. Žonda

Všeobecná teória relativity

Tento text je učebná pomôcka k výberovej prednáške ÚFV/TRV1/00 Všeobecná teória relativity, ktorá je v ponuke na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ a koná sa v letnom semestri nepretržite už asi desať rokov, živená záujmom mladých ľudí o jej tému. Nie je to skriptum, ale skôr „maximálne rozšírený sylabus“ a nie je celkom dokončená, chýba napr. prvá kapitola o rovnomerne zrýchlenom relativistickom pohybe. Keďže však niektorí študenti odboru fyzika, ktorí navštevovali túto prednášku v šk. r. 2003/04 boli ochotní skontrolovať výpočty, prepísať text a nakresliť obrázky, vznikol tak autorský kolektív, ktorý urobil to, čo by som sám nedokázal: dostať túto pomôcku do elektronickej podoby. Dúfam, že sa nám podarí ju dokončiť čo najskôr. Za kontakt s týmto kolektívom a redakčné práce na texte ďakujem najmä Bc. Danielovi Reitznerovi zo 4. ročníka tejto fakulty.

Skúsený čitateľ ľahko pozná, že text, ktorého sa „úzkostlivo“ držíme, je Landauova a Lifšicova Teória poľa [1]. Dúfam, že uvidí i to, že sme aspoň niektoré landauovské „zrejme“ a „elementárne“ starostlivo prepočítali čo najjednoduchším aparátom. Pre malý rozsah hodín sme sa vyhli integrovaniu na varietách a i ďalším vzťahom, presahujúcim rámec elementárnych definícií, napr. pri práci s Christoffelovými symbolmi. Okrem spomínanej knihy boli ešte niektoré časti urobené podľa McVittieho [2], Eddingtona [3] a Petrova [4].

I keď ide o staršiu literatúru („bakchanálie“ indexov — Budemann), absolvovanie prednášky by malo umožniť bez problému čítať knihy typu [5], resp. [6], časť odborných článkov a prístupíť k štúdiu modernej diferenciálnej geometrie [7] a potom k najnovším odborným článkom. A samozrejme byť doma v populárno-vedeckej literatúre od Hawkinga po Daviesa, či superstruny a vedieť kompletne odpovedať na otázky zvedavého okolia.

V Košiciach, 20. február 2005

Ing. Samuel Mockovčiak, CSc.

Referencie

- [1] Landau L. D., Lifšic E. M.: Теория поля, Nauka, Moskva, 1973
- [2] McVittie: General Relativity and Cosmology, ruský preklad Izd. inostr. literatury, Moskva, 1961
- [3] Eddington A. S.: Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, Čína
- [4] Petrov A. Z.: Пространства Ейнштейна, Nauka, Moskva, 1961
- [5] Weinberg S.: Gravitation and Cosmology, John Wiley and Sons, Inc., New York — London — Sydney — Toronto, 1972
- [6] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.: Gravitation, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973
- [7] Fecko M.: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, IRIS, Bratislava, 2004

II Tenzory v pseudoriemannovom priestore

Transformujeme objekty $T \rightarrow T'$, teda aj súradnice $x \rightarrow x'$. Ďalej budeme používať konvencie:

- Pre indexy:
 - grécke (λ, μ, ν, \dots) — časovopriestorové sa teda indexujú 0 až 3,
 - latinské (i, j, k, \dots) — priestorové sa indexujú 1 až 3
- Sumačné pravidlo: ako v ŠTR, sčíta sa cez nemý index, t.j. taký, ktorý sa vo výraze vyskytuje v kovariantnej aj kontravariantnej polohe.

Kontravariantný 4-vektor sa transformuje ako diferenciál súradníc $\sim dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu$, t.j.:

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu \quad (\text{II.1})$$

Kovariantný 4-vektor sa transformuje ako derivácia skaláru $\sim \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$, t.j.:

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu \quad (\text{II.2})$$

Analogicky pre *tenzory vyšších rádov*:

$$A^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} A'^{\lambda\rho}$$

$$A'_\nu{}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} A'^{\lambda\rho}$$

Zmysel: Pri takomto pravidle transformácie sa zachováva (vnútorný) skalárny súčin 4-vektorov:

$$A^\mu B_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} A'^\lambda B'_\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x'^\lambda} A'^\lambda B'_\rho = A'^\lambda B'_\lambda \quad (\text{II.3})$$

lebo: $\frac{\partial x'^\rho}{\partial x'^\lambda} = \delta_\lambda^\rho$ (ešte nevieme, že je to tenzor!)

II.1 Metrický tenzor

Poznáme ho z výrazu pre interval, kde vystupuje ako dvakrát *kovariantný*:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{II.4})$$

Zaujímame sa len o priestory, v ktorých je symetrický:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

Podobne ako v ŠTR ho v ďalšom použijeme na zdvíhanie a spúšťanie indexov, preto *kontravariantný* musíme definovať priamo:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\text{algebraický doplnok ku } g_{\mu\nu}}{g} \quad (\text{II.5})$$

kde $g \equiv \text{Det } g_{\mu\nu} \neq 0$. Pri def. (II.5) je matica $g^{\mu\nu}$ inverzná k matici $g_{\mu\nu}$ (metrika musí byť nesingulárna !), t.j.:

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho} \quad (\text{II.6})$$

Je to jednotková matica (ešte stále nevieme že je to tenzor !)

Úloha: Z faktu, že ds^2 je skalár ukážte, že $g_{\mu\nu}$ je tenzor.

Riešenie:

$$ds^2 = g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} \stackrel{!(x' \rightarrow x)}{=} \{x' \rightarrow x\} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (\text{skalár!})$$

$$g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g'_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} dx^{\lambda} dx^{\rho} \stackrel{!}{=} g_{\lambda\rho} dx^{\lambda} dx^{\rho}$$

kde sme využili, že

$$g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \equiv g_{\lambda\rho} dx^{\lambda} dx^{\rho}$$

preto:

$$g_{\lambda\rho} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} g'_{\mu\nu} \Rightarrow$$

je to 2×2 kovariantný tenzor.

Rozhodnúť o tom, ktorý objekt je tenzor nám vo všeobecnosti umožňuje veta o podiele.

II.2 Teoréma o podieli

Každá sada funkcií súradníc, ktorej vnútorný súčin s niektorým ľubovoľným vektorom je tenzor, je sadou komponent nejakého tenzora:

$$\sum_{\lambda=0}^3 U'_{\lambda} T'(\lambda, \mu) = V'^{\mu} \quad (\text{II.7a})$$

$$\sum_{\lambda=0}^3 U_{\lambda} T(\lambda, \nu) = V^{\nu} \quad (\text{II.7b})$$

Dôkaz:

Z (II.7a) máme:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^3 U'_{\lambda} T'(\lambda, \mu) &= V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} = \{ \text{za } V^{\nu} \text{ dosadíme z (II.7b)} \} = \\ &= \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \left\{ \sum_{\lambda=1}^n U_{\lambda} T(\lambda, \nu) \right\} = \{ U_{\lambda} \text{ vyjadríme v čiarkovanej sústave} \\ U_{\lambda} = \frac{\partial x'^{\varrho}}{\partial x^{\lambda}} U'_{\varrho} \} &= \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \left\{ \sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial x'^{\varrho}}{\partial x^{\lambda}} U'_{\varrho} T(\lambda, \nu) \right\} \end{aligned}$$

Index λ na ĽS rovnice je nemý, môžeme ho zameniť za ϱ , keďže na PS rovnice v $\{ \}$ sa sčíta cez ϱ , máme:

$$\sum_{\varrho=0}^3 U'_{\varrho} \left\{ T'(\varrho; \mu) - \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\varrho}}{\partial x^{\lambda}} T(\lambda; \nu) \right\} = 0$$

Podľa predpokladu U'_{ϱ} je ľubovoľný vektor, preto $\{ \} \stackrel{!}{=} 0$ a T sa transformuje takto:

$$T'(\varrho; \mu) = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\varrho}}{\partial x^{\lambda}} T(\lambda; \nu) \Rightarrow T'(\varrho; \mu) \equiv T'^{\varrho\mu}$$

Q.E.D.

II.3 Tenzor δ_{ν}^{μ}

Kroneckerov symbol δ_{ν}^{μ} s vlastnosťami:

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 0, & \text{ak } \mu \neq \nu \\ 1, & \text{ak } \mu = \nu \end{cases}$$

(resp. jednotkovú maticu) sme už viac krát použili. Teraz pomocou vety o podiele (II.7a) ľahko ukážeme, že ide o tenzor.

Platí: $U_{\mu} \delta_{\nu}^{\mu} = U_{\nu}$ (priamo z vlastností δ_{ν}^{μ}) pre ľubovoľný 4-vektor U_{μ} . Preto z (II.7a) je δ_{ν}^{μ} zmiešaný tenzor druhého rádu. Okrem toho:

$$\delta_{\mu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \delta_{\beta}^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} = \begin{cases} 0, & \text{ak } \lambda \neq \mu \\ 1, & \text{ak } \lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \delta_{\mu}^{\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}$$

Komponenty tohto tenzora sú teda rovnaké vo všetkých súradnicových sústavách. Z rovnice (II.6) vidíme tiež, že δ_{ν}^{μ} je zmiešaná forma (raz kovariantná a raz kontravariantná) metrického tenzora $g_{\mu\nu}$.

II.4 Zdvíhanie a spúšťanie indexov

Rovnako, ako v ŠTR :

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad \text{pre 4-vektory}$$

podobne pre tenzory:

$$A^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} A_{\rho\nu}, \quad A^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} A_{\rho\lambda}, \dots \quad (\text{II.8})$$

II.5 Kovariantné derivovanie

V ŠTR (tzv. galileovské súradnice) tvoria diferenciály dA_μ 4-vektora A_μ tiež zložky 4-vektora. V krivočiarych súradniciach to tak vo všeobecnosti nie je. Nech $A_\mu = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} A'_\rho$. Potom:

$$dA_\mu = d \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} A'_\rho \right) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} dA'_\rho + A'_\rho d \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} dA'_\rho + A'_\rho \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} dx^\nu$$

Druhý člen na pravej strane je nulový len vtedy, ak x' sú *lineárne* funkcie x a len vtedy sa dA_μ transformuje ako kovariantný 4-vektor. (V ŠTR je to tak, lebo Lorentzova transformácia je lineárna!)

Hľadáme nové diferenciály DA^μ tak, aby boli 4-vektory. Nech

$$DA^\mu = dA^\mu - \delta A^\mu, \quad (\text{II.9})$$

kde $-\delta A^\mu$ je zmena 4-vektora A^μ pri tzv. *paralelnom prenose*¹ a podľa Levi-Civitu závisí lineárne od:

1. samotných zložiek A^ρ ,
2. od posunutia dx^ν .

Odtiaľ teda plynie, že

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\rho\nu}^\mu A^\rho dx^\nu, \quad (\text{II.10})$$

kde $\Gamma_{\rho\nu}^\mu$ sú funkcie súradníc, tzv. *Christoffelove symboly 2. druhu*.

II.5.1 Niektoré vlastnosti $\Gamma_{\rho\nu}^\mu$

Netvorí tenzor! Je to zrejmé už z toho, že v galileovských súradniciach všetky $\Gamma_{\rho\nu}^\mu = 0$ a teda by boli nulové vo všetkých sústavách, ak by sa transformovali ako tenzory. Majú niektoré tenzorové vlastnosti - spúšťanie horného indexu:

$$\Gamma_{\mu, \rho\nu} = \Gamma_{\rho\nu}^\kappa g_{\kappa\mu} \quad (\text{II.11})$$

¹V x^μ máme A^μ a po posune v $x^\mu + dx^\mu$ máme $A^\mu + dA^\mu$ + započítame zmenu A^μ označovanú δA^μ pri paralelnom prenose — tá je *nulová* v galileovských súradniciach.

Veličiny $\Gamma_{\mu,\varrho\nu}$ sa nazývajú *Christoffelove symboly 1.druhu*.

Iné formy zápisu McVittie: $\Gamma_{\varrho\nu}^{\mu} \equiv \{\mu^{\varrho\nu}\}$; $\Gamma_{\mu,\varrho\nu} \equiv \{\varrho\nu, \mu\}$; používa sa aj zápis $[\frac{\varrho\nu}{\mu}]$

Zdvíhanie dolného indexu:

$$\Gamma_{\varrho\nu}^{\mu} = g^{\mu\kappa} \Gamma_{\kappa,\varrho\nu}$$

Z (II.10) môžeme nájsť paralelný prenos δA_{μ} kovariantného 4-vektora: skalár sa pri paralelnom prenose nemôže meniť (číslo!), preto $\delta(A^{\mu}B_{\mu}) = 0$

$$A^{\mu}\delta B_{\mu} = -B_{\mu}\delta A^{\mu} = B_{\mu}\Gamma_{\varrho\nu}^{\mu}A^{\varrho}dx^{\nu} = B_{\mu}A^{\varrho}\Gamma_{\varrho\nu}^{\mu}dx^{\nu} \stackrel{\mu\leftrightarrow\varrho}{=} B_{\varrho}A^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\varrho}dx^{\nu}$$

a porovnaním máme pre paralelný prenos kovariantného 4-vektora:

$$\delta B_{\mu} = B_{\varrho}\Gamma_{\mu\nu}^{\varrho}dx^{\nu} \quad (\text{II.12})$$

Pre DA^{μ} po dosadení do (II.9) za $dA^{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}dx^{\nu}$ máme konečne:

$$DA^{\mu} = \left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\varrho\nu}^{\mu}A^{\varrho} \right) dx^{\nu} \quad (\text{II.13})$$

$$DA_{\mu} = \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\varrho}A_{\varrho} \right) dx^{\nu} \quad (\text{II.14})$$

Výrazy v zátvorkách sú podľa vety o podiele tenzory a nazývajú sa *kovariantné derivácie* 4-vektorov A^{μ} resp. A_{ν} . Označujú sa bodkočiarkou:

$$A^{\mu}_{;\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\varrho\nu}^{\mu}A^{\varrho} \quad (\text{II.15})$$

$$A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\varrho}A_{\varrho} \quad (\text{II.16})$$

V galileovských súradniciach sú Christoffelove symboly nulové a kovariantné derivácie prejdú na zvyčajné parciálne derivácie.

Pozor! Indexy derivovania sa dajú zdvihnúť (sú to tenzory!) a dostaneme tzv. kontravariantné derivácie.

Kovariantná derivácia tenzora:

$$\delta(A^{\mu}B^{\kappa}) = A^{\mu}\delta B^{\kappa} + B^{\kappa}\delta A^{\mu} = (-A^{\mu}\Gamma_{\varrho\nu}^{\kappa}B^{\varrho} - B^{\kappa}\Gamma_{\varrho\nu}^{\mu}A^{\varrho})dx^{\nu}$$

$$\delta(A^{\mu\kappa}) = -(A^{\mu\varrho}\Gamma_{\varrho\nu}^{\kappa} + A^{\varrho\kappa}\Gamma_{\varrho\nu}^{\mu})dx^{\nu}$$

$$DA^{\mu\kappa} = dA^{\mu\kappa} - \delta A^{\mu\kappa} = A^{\mu\kappa}_{;\nu}dx^{\nu}$$

pričom

$$A^{\mu\kappa}_{;\nu} = \frac{\partial A^{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + A^{\mu\varrho}\Gamma_{\varrho\nu}^\kappa + A^{\varrho\kappa}\Gamma_{\varrho\nu}^\mu. \quad (\text{II.17})$$

Podobne

$$A_{\mu\kappa;\nu} = \frac{\partial A_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - A_{\mu\varrho}\Gamma_{\kappa\nu}^\varrho - A_{\varrho\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^\varrho \quad (\text{II.18})$$

Všeobecné pravidlo: Kovariantnú deriváciu z tenzora A_{\dots} podľa x^ν získame tak, že k obyčajnej derivácii $\frac{\partial A_{\dots}}{\partial x^\nu}$

(II.19)

1. na každý kovariantný index $A_{\dots\mu\dots}$ pridáme člen $(-\Gamma_{\mu\nu}^\varrho A_{\dots\varrho\dots})$
2. na každý kontravariantný index $A^{\dots\mu\dots}$ pridáme člen $(\Gamma_{\varrho\nu}^\mu A^{\dots\varrho\dots})$

Kovariantná derivácia metrického tenzora:

$$DA_\mu = g_{\mu\nu}DA^\nu$$

a zároveň

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \Rightarrow DA_\mu = D(g_{\mu\nu}A^\nu) = g_{\mu\nu}DA^\nu + A^\nu Dg_{\mu\nu}.$$

Vidíme teda, že druhý člen = 0:

$$Dg_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu} = \text{const.} \quad (\text{II.20})$$

pri kovariantnom derivovaní.

II.5.2 Vlastnosti symetrie Christoffelových symbolov.

Christoffelove symboly 2. druhu sú symetrické vzhľadom k zámene dolných indexov, t.j.

$$\Gamma_{\varrho\nu}^\mu = \Gamma_{\nu\varrho}^\mu \quad (\text{II.21})$$

Dôkaz je jednoduchý, i keď trochu umelý:

skúmame rozdiel kovariantných derivácií $A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$ (nulový v galileovej sústave).

Keďže ide o rozdiel tenzorov, je to tenzor. Nech A_μ je gradient skaláru φ , t.j. $A_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}$, potom:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\nu\partial x^\mu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$$

Zo vzťahu (II.16) máme:

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = (\Gamma_{\nu\mu}^\varrho - \Gamma_{\mu\nu}^\varrho) \frac{\partial\varphi}{\partial x^\varrho}$$

Tenzor na ĽS rovnice je nulový v galileovskej sústave a preto musí byť nulový vo všetkých vzťažných sústavách. Keďže gradient φ je všeobecne nenulový, musí byť

$$\Gamma_{\nu\mu}^e = \Gamma_{\mu\nu}^e$$

Q.E.D.

Podobne platí pre symboly 1. druhu:

$$\Gamma_{\mu,\varrho\mu} = \Gamma_{\nu,\mu\varrho} \quad (\text{II.22})$$

Vlastnosť (II.21) vedie k tomu, že v 4-rozmernom časopriestore je vo všeobecnosti len 40 nezávislých zložiek (pre každé ϱ 10 kombinácií $\mu\nu$)

II.5.3 Transformácia Christoffelových symbolov pri zmene súradnicovej sústavy. $\Gamma \rightarrow \Gamma'$

Vychádzame z toho, že $A_{\mu;\nu}$ sa pri prechode z čiarkovanej do nečiarkovanej sústavy transformuje ako tenzor a že vzťah (II.16) musí platiť v oboch sústavách:

$$A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^e A_e$$

a zároveň

$$A_{\mu;\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} A'_{\alpha;\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} - \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} A'_\gamma \right) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial A'_\alpha}{\partial x^\nu} - \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} A'_\gamma$$

V tomto výraze sa teraz postupne vrátíme k nečiarkovaným A_ρ :

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \underbrace{\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A'_\alpha \right)}_{A_\mu} - \underbrace{A'_\alpha}_{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha} A_\rho} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^e}{\partial x'^\gamma} A_e$$

a máme

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \left(\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^e}{\partial x'^\gamma} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^e}{\partial x'^\alpha} \right) A_e$$

a porovnaním s prvým riadkom dostávame výsledok

$$\Gamma_{\mu\nu}^e = \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^e}{\partial x'^\gamma} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^e}{\partial x'^\alpha} \quad (\text{II.23})$$

Christoffelove symboly 2. druhu sa transformujú ako tenzor len ak druhý člen je nulový, t.j. pri lineárnych transformáciách súradníc, všeobecne *nie sú tenzory!*

II.5.4 Vyjadrenie Christoffelovych symbolov cez metrický tenzor

Až doteraz sme nemali explicitný výraz pre Christoffelove symboly. Boli to len nejaké funkcie súradníc s vlastnosťami, určenými tak aby symboly realizovali paralelný prenos vektora, resp. aby zaisťovali tenzorový charakter diferenciálu DA^μ . Priestory, kde nie je zavedená metrika, len paralelný prenos, sa nazývajú *priestory s afinnou konexiou* a samotné Christoffelove symboly 2.druhu realizujú túto konexiu (koeficienty afinnej konexie). V *metrických priestoroch* (to je náš prípad) je afinná konexia (\parallel prenos vektora) daný metrikou \Rightarrow Christoffelove symboly sa dajú vyjadriť cez metrický tenzor $g_{\mu\nu}$. V nasledujúcom to urobíme. Z (II.20) vyplýva (len iný zápis), že:

$$g_{\mu\nu;\varrho} = 0 \quad (\text{II.24})$$

t.j. pri kovariantnom derivovaní $g_{\mu\nu}$ je konštanta. Podľa (II.18) platí:

$$g_{\mu\nu;\varrho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} - \Gamma_{\mu\varrho}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\varrho}^\alpha g_{\mu\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} - \Gamma_{\nu,\mu\varrho} - \Gamma_{\mu,\nu\varrho} = 0$$

Použili sme vlastnosti symetrie metrického tenzora a Christoffelovych symbolov. Z poslednej rovnosti máme:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} = \Gamma_{\nu,\mu\varrho} + \Gamma_{\mu,\nu\varrho}$$

a cyklickou zámenou $\mu \leftarrow \nu \leftarrow \varrho \leftarrow \mu$ dostaneme

$$\frac{\partial g_{\varrho\mu}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu,\varrho\nu} + \Gamma_{\varrho,\mu\nu}$$

$$-\frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x^\mu} = -\Gamma_{\varrho,\nu\mu} - \Gamma_{\nu,\varrho\mu}$$

Sčítaním týchto troch rovníc dostávame:

$$\Gamma_{\mu,\varrho\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial g_{\varrho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\varrho\nu}}{\partial x^\mu} \right) \quad (\text{II.25})$$

pre Christoffelove symboly 1. druhu a

$$\Gamma_{\varrho\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial g_{\varrho\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\varrho\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (\text{II.26})$$

pre Christoffelove symboly 2. druhu. Symetria v dolných indexoch je zjavná.

Úloha: Dokážte priamym výpočtom, že $g_{\mu\nu;\varrho} = 0$

Riešenie: Priamym dosadením (II.25) do vzťahu

$$g_{\mu\nu;\varrho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho} - \Gamma_{\nu,\mu\varrho} - \Gamma_{\mu,\nu\varrho}$$

dostaneme nulu.

III Častica v gravitačnom poli. Geodetické čiary.

V časti ?? sme na základe myšlienkových pokusov s voľne padajúcou sústavou v gravitačnom poli usúdili, že táto sústava sa chová ako inerciálna. Gravitačné pole sa prejaví v geometrii sústavy, t.j. v metrickom tenzore. Častica na ktorú okrem gravitačnej sily nepôsobia iné sily sa bude chovať ako inerciálna častica v ŠTR. Jej rovnicu odvodíme analogicky ako by sme v ŠTR určili rovnicu pre inerciálny pohyb. Zároveň to bude, podľa princípu geodetických čiar - geodetická čiara v našej geometrii.

V ŠTR sa voľná častica pohybuje podľa rovnice $du^\mu = 0$, kde u^μ je 4-vektor rýchlosti, $\frac{dx^\mu}{ds} = u^\mu$.

V krivočiarych súradniciach prirodzeným zovšeobecnením takého pohybu bude nahradenie diferenciálu kovariantným :

$$Du^\mu = 0 \quad (III.1)$$

t.j. $du^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu u^\rho dx^\nu = 0$. Ak túto rovnicu delíme ds , dostávame

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (III.2)$$

Toto je hľadaná rovnica pohybu častice v gravitačnom poli. Vynásobením (III.2) hmotnosťou m a porovnaním s Newtonovou rovnicou vidíme, že výraz

$$-m\Gamma_{\rho\nu}^\mu u^\rho u^\nu$$

hrá úlohu 4-sily (gravitačnej). Keďže sa Christoffelove symboly $\Gamma_{\rho\nu}^\mu$ dajú vyjadriť ako prvé derivácie metrického tenzora podľa súradníc (u Newtona $\vec{F} = -\text{grad } \varphi$), hrá $g_{\mu\nu}$ úlohu gravitačných potenciálov a Christoffelove symboly sú analógiou intenzity gravitačného poľa. Z geometrického hľadiska predstavuje rovnica (III.2) analógiu priamky v euklidovskej geometrii — je to *geodetická čiara* — najkratšia vzdialenosť medzi dvomi blízkymi bodmi v našom priestore.

Odvoďme ešte jeden užitočný tvar rovnice geodetickej čiary. Pre kovariantný 4-vektor rýchlosti máme:

$$Du_\mu = 0, \text{ t.j.}$$

$$du_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho u_\rho dx^\nu = 0$$

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho u_\rho u^\nu = 0$$

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\alpha} u^\alpha u^\nu = 0$$

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\beta,\mu\nu} g^{\beta\varrho} g_{\varrho\alpha} u^\alpha u^\nu = 0$$

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\beta,\mu\nu} \delta_\alpha^\beta u^\alpha u^\nu = 0$$

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\beta,\mu\nu} u^\beta u^\nu = 0 \quad (\text{III.3})$$

Ale

$$\Gamma_{\beta,\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right)$$

a po vynásobení $u^\beta u^\nu$ sa prvý a tretí člen odčíta:

$$\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} u^\beta u^\nu - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} u^\beta u^\nu$$

a máme konečný tvar (v druhom člene zameníme nemé indexy $\beta \longleftrightarrow \nu$)

$$\frac{du_\mu}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} u^\beta u^\nu = 0 \quad (\text{III.4})$$

Do (III.4) už nevstupujú $\Gamma_{\varrho\nu}^\mu$, len derivácie metrického tenzora.

III.1 Prvý integrál pohybu rovnice (III.4)

Ako v prípade ŠTR, pre voľnú časticu očakávame, že sa bude zachovávať 4-vektor rýchlosti pozdĺž geodetickej čiary, t.j.

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \text{const.} \quad (\text{III.5})$$

Dôkaz: Rovnicu (III.4) násobíme u^μ (a teda aj sčítame cez μ):

$$u^\mu \frac{du_\mu}{ds} - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{dx^\mu}{ds} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} \right)}_{\frac{dg_{\beta\nu}}{ds}} u^\beta u^\nu = 0$$

$$u^\mu \frac{du_\mu}{ds} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{ds} (g_{\beta\nu} u^\beta u^\nu) - g_{\beta\nu} \frac{du^\beta}{ds} u^\nu - g_{\beta\nu} u^\beta \frac{du^\nu}{ds} \right\} = 0$$

$$u^\mu \frac{du_\mu}{ds} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{ds} (g_{\beta\nu} u^\beta u^\nu) - 2g_{\beta\nu} \frac{du^\beta}{ds} u^\nu \right\} = 0$$

$$u^\mu \frac{du_\mu}{ds} + u_\beta \frac{du^\beta}{ds} - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (g_{\beta\nu} u^\beta u^\nu) = 0$$

$$\frac{d}{ds} (u^\mu u_\mu) - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (u^\nu u_\nu) = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (u^\nu u_\nu) = 0$$

a teda

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \text{const.}$$

Úloha: Odvodte geodetické čiary na povrchu gule.

Riešenie: Pre guľu s polomerom a máme:

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$$x^1 \equiv \theta \quad x^2 \equiv \varphi$$

a nenulové zložky $g_{\mu\nu}$ sú $g_{11} = a^2$, $g_{22} = a^2 \sin^2 \theta$. Použijeme rovnicu (III.4)

$$\frac{d}{ds} (g_{\alpha\mu} u^\alpha) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} u^\beta u^\nu = 0 \quad \mu = 1, 2$$

$$\mu = 1 : \frac{d}{ds} (g_{11} u^1) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^1} u^\nu u^\nu = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(a^2 \frac{d\theta}{ds} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(a^2 \frac{d\theta}{ds} \right) - a^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0 \quad 1. \text{ rovnica}$$

$$\mu = 2 : \frac{d}{ds} \left(g_{22} \frac{d\varphi}{ds} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi} \dots = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(a^2 \sin \theta \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \quad 2. \text{ rovnica}$$

Na prvý pohľad sú vidieť niektoré riešenia:

$\varphi = \text{const.}$, $\theta a = s$ — poludníky

$\theta = \frac{\pi}{2}$, $a\varphi = s$ — rovník

sú to všetky *hlavné* kružnice, lebo pól môže byť hocikde. Ťažší by bol dôkaz, že *len* hlavné kružnice.

III.2 Newtonovské priblíženie — častica v slabom stacionárnom gravitačnom poli

V tomto odstavci sa budeme zaoberať časticou pomaly ($\ll c$) sa pohybujúcou v slabom stacionárnom gravitačnom poli, aby sme našli väzbu na Newtonovu teóriu.

Pohyb bude riadený rovnicami pre geodetickú čiaru (III.2):

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Máme: $x^0 \equiv ct$, $x^i (i = 1, 2, 3) \equiv \vec{x} \equiv (x; y; z)$ a pre *pomalý pohyb* platí: $\frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dct}{ds} \leq c$.

Pri tejto podmienke ostáva v dvojnej sume v (III.2) jediný člen:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{dct}{ds} \right)^2 + \text{malé členy} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Podľa (II.26) pre Γ_{00}^i platí:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \right)$$

Stacionárnosť znamená, že prvé dva členy sú malé, resp. nulové a teda:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{i\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \quad i = 1, 2, 3$$

Slabé pole znamená, že sa $g_{\mu\nu}$ bude len málo líšiť od prípadu ŠTR, t.j. od $\eta_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1) \equiv \eta^{\mu\nu}$, t.j. $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, kde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ (je to absolútna hodnota a nie determinant!). V prvom priblížení podľa $h_{\mu\nu}$ dostaneme

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \eta^{i\nu} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu},$$

ale vzhľadom na diagonálnosť η ostane v sume cez ν len člen $\nu = i$

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \eta^{ii} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} (-1) \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

Pre η^{ii} neplatí sumačné pravidlo, index i nie je nemý, lebo je aj na ĽS!

Pre priestorové zložky $i = 1, 2, 3$ dostaneme teda rovnicu

$$\frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} = -\frac{1}{2} \left(c \frac{dt}{ds} \right)^2 \text{grad } h_{00} \quad (\text{III.6a})$$

Pre $\mu = 0$ budeme mať

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2} \eta^{0\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{2} \eta^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \equiv 0,$$

lebo $\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = \frac{\partial h_{00}}{\partial ct} = 0$ (stacionárne pole) a geodetická čiara má štvrtú rovnicu

$$\frac{d^2 ct}{ds^2} = 0 \quad (\text{III.6b})$$

Aby sme riešenia (III.6a a III.6b) porovnali s Newtonovou teóriou, násobíme (III.6a) $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{x}}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = -\frac{c^2}{2} \text{grad } h_{00}$$

a ľS upravíme na:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{x}}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{x}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}.$$

Dostaneme konečný tvar

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \text{grad } h_{00},$$

ktorý môžeme porovnať s Newtonovou teóriou:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\text{grad} \varphi,$$

kde $\varphi = -\frac{kM}{r}$ je Newtonov gravitačný potenciál, k je univerzálna gravitačná konštanta (pozri ďalej). Vidíme že efekt gravitačného pôsobenia je ekvivalentný pohybu po geodetickej čiare v priestore s metrikou

$$\text{diag} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}; -1; -1; -1 \right) = \text{diag} \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r}; -1; -1; -1 \right) \quad (\text{III.7})$$

Rovnica (III.6b) dáva $\frac{d(ct)}{ds} = \text{const.}$, ako v ŠTR (ds je tu vlastný čas).

III.3 Nulové (izotropné) geodetické čiary. Pohyb svetelného lúča v gravitačnom poli

Špecifický charakter vzťahu časovej a priestorových súradníc, ktorý vedie v ŠTR k *pseudo-euklidovskej* metrike sa zachováva aj vo VTR. Pseudoriemanovské priestory obsahujú ako podmnožinu podpriestory analogické izotropnému (svetelnému) kužeľu. Pre geodetické čiary v týchto podpriestoroch platí, že $ds = 0$.

Podľa princípu geodetických čiar sa takto v gravitačnom poli pohybujú častice s nulovou pokojovou hmotnosťou, napr. svetlo, ale aj iné (neutríno). V tomto prípade:

1. nemôžeme požiť rovnice (III.2), (III.3) a (III.4),
2. const. v rovnici (III.5) pre prvý integrál pohybu je vždy rovná nule.

Pri štúdiu svetelných lúčov postupujeme nasledovne: miesto štvorvektora rýchlosti u^μ použijeme vlnový štvorvektor k^μ , ktorý má zložky:

$$k^\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) \quad k_\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k} \right), \quad (\text{III.8})$$

kde ω — frekvencia, $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$ — vlnový vektor, \vec{n} — jednotkový vektor v smere pohybu svetelného lúča (v ŠTR sa nemení).

V ŠTR platí pre k^μ :

1. $dk^\mu = 0$ pozdĺž lúča
2. $k_\mu k^\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{n} \cdot \vec{n} = 0$

V gravitačnom poli nahradíme rovnicu $dk^\mu = 0$ rovnicou:

$$Dk^\mu = 0, \quad (\text{III.9})$$

t.j.

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu k^\nu k^\rho = 0 \quad (\text{III.10})$$

a z nej vyplýva podobne, ako pre nenulové geodetické čiary integrál pohybu

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad (\text{III.11})$$

V geometrickej optike môžeme zaviesť funkciu ψ , zvanú *eikonála*, z ktorej sa vypočíta \vec{k} a ω takto:

$$\vec{k} = \text{grad } \psi$$

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Potom rovnica (III.11) má tvar

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{III.12})$$

To je rovnica pre eikonálu v gravitačnom poli a z nej sa dá určiť dráha lúča.

IV Eisteinove rovnice gravitačného poľa

Aby sme objasnili motívy vedúce Einsteina k odvodeniu rovníc gravitačného poľa, pozrime si tabuľku [1] analógií medzi Newtonovou a Einsteinovou teóriou gravitácie.

Tabuľka 1: Analogické veličiny v Newtonovej a Einsteinovej teórii gravitácie

Newtonova teória gravitácie	Gravitácia ako geometria
gravitačný potenciál φ	metrický tenzor $g_{\mu\nu}$
gravitačná sila $\nabla\varphi$ (prvé derivácie potenciálu)	Christoffelove symboly obsahujúce $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}$
rovnica pre určenie potenciálu $\nabla^2\varphi = -4\pi k\rho$ (druhé derivácie potenciálu)	tenzorová rovnica s $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\kappa}$ na ľavej strane
zdroj poľa ρ (rozloženie hmotností)	$T_{\mu\nu}$ (tenzor energie-hybnosti)

Rovnica, ktorú očakávame, by mala byť tenzorová rovnica a tým pádom platná vo všetkých súradnicových sústavách. Mala by to byť rovnosť dvoch (aspoň dvoch?) tenzorov aspoň druhého rádu, pričom jeden by mal byť tenzor energie-hybnosti, alebo jeho funkcia a druhý by mal byť tenzor s čisto geometrickým významom, obsahujúci druhé derivácie (prípadne nižšie) metrického tenzora podľa súradníc.

Pozrime sa najprv na ľavú stranu t.j. geometriu.

IV.1 Riemannov-Christoffelov tenzor krivosti

Christoffelove symboly vstupujú do výrazov pre kovariantné derivovanie tenzorov a obsahujú prvé derivácie $g_{\mu\nu}$ podľa súradníc. Z toho plynie, že druhá kovariantná derivácia už musí obsahovať druhé derivácie $g_{\mu\nu}$ podľa súradníc.

Študujme teda druhú kovariantnú deriváciu vektora V_μ .

Prvá derivácia V_μ má tvar

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V_\alpha.$$

Druhá derivácia potom bude

$$V_{\mu;\nu;\rho} = \frac{\partial V_{\mu;\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\beta V_{\beta;\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^\beta V_{\mu;\beta} =$$

$$\frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\rho} V_\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\beta \frac{\partial V_\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\delta V_\delta - \Gamma_{\nu\rho}^\beta \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\nu\rho}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\delta V_\delta,$$

kde sme použili výrazy

$$V_{\beta;\nu} = \frac{\partial V_\beta}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\delta V_\delta,$$

$$V_{\mu;\beta} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\delta V_\delta.$$

Ak v druhej derivácii navzájom zameníme indexy ν a ρ a rovnicu vynásobíme -1 , dostaneme

$$-V_{\mu;\rho;\nu} = -\frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\alpha}{\partial x^\nu} V_\alpha + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial V_\beta}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\rho}^\delta V_\delta +$$

$$+ \Gamma_{\rho\nu}^\beta \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\rho\nu}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\delta V_\delta$$

a po sčítaní oboch výrazov dostávame

$$V_{\mu;\nu;\rho} - V_{\mu;\rho;\nu} = \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\rho}^\beta - \Gamma_{\beta\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta \right] V_\alpha.$$

Na pravej strane rovnice stojí tenzor tretieho rádu a V_α je tenzor prvého rádu. Z vety o podiele vyplýva, že výraz v hranatej zátvorke na pravej strane predstavuje tenzor štvrtého rádu

$$R_{\mu\nu\rho}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\rho}^\beta - \Gamma_{\beta\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta, \quad (\text{IV.1})$$

ktorý je raz kontravariantný a trikrát kovariantný. Tenzor (IV.1) sa nazýva *Riemannov-Christoffelov tenzor*.

Zatiaľ čo v galileovských súradniciach platí

$$\frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho}$$

t.j., že derivácie komutujú, tu platí

$$V_{\mu;\nu;\rho} - V_{\mu;\rho;\nu} = R_{\mu\nu\rho}^\alpha V_\alpha \quad (\text{IV.2})$$

Tenzor $R_{\mu\nu\rho}^\alpha$ je dôležitou charakteristikou priestoru a je jediným významným tenzorom štvrtého rádu.

Často sa môžeme stretnúť so zjednodušenými zápismi pre kovariantnú deriváciu

$$\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

a pre tzv. antisymetrické zátvorky

$$T_{[ik]} = \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}).$$

S pomocou týchto symbolov sa Riemannov-Christoffelov tenzor krivosti dá jednoducho zapísať v tvare

$$\frac{1}{2}R_{\mu\nu\rho}^\alpha = \partial_{[\nu} \Gamma_{\rho]\mu}^\alpha + \Gamma_{\beta[\nu}^\alpha \Gamma_{\rho]\mu}^\beta \quad (\text{IV.1a})$$

IV.1.1 Symetrie Riemannovho-Christoffelovho tenzora

Symetriu Riemannovho-Christoffelovho tenzora krivosti budeme skúmať na štyrikrát kovariantnom tenzore

$$R_{\alpha\mu\nu\rho} = g_{\alpha\sigma} R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}. \quad (\text{IV.3})$$

Bez dôkazu uvádzame nasledujúce vzťahy symetrie Riemannovho-Christoffelovho tenzora:

1. Antisymetria voči zámene druhej dvojice indexov

$$R_{\alpha\mu\nu\rho} = -R_{\alpha\mu\rho\nu},$$

2. antisymetria voči zámene prvých dvoch indexov

$$R_{\alpha\mu\nu\rho} = -R_{\mu\alpha\nu\rho},$$

3. symetria voči zámene dvojíc indexov navzájom

$$R_{\alpha\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\alpha\mu},$$

4. cyklická suma cez ľubovoľné tri indexy

$$R_{\alpha\mu\nu\rho} + R_{\alpha\rho\mu\nu} + R_{\alpha\nu\rho\mu} = 0.$$

5. Veľmi dôležitá je tzv. *Bianchiho identita*

$$R_{\mu\nu\rho;\beta}^{\alpha} + R_{\mu\beta\nu;\rho}^{\alpha} + R_{\mu\rho\beta;\nu}^{\alpha} = 0. \quad (\text{IV.4})$$

Tieto symetrie vedú k tomu, že počet nezávislých zložiek Riemannovho-Christoffelovho tenzora je $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$, kde n je rozmer uvažovaného priestoru, t.j. 20 nezávislých zložiek pre štvorrozmerný časopriestor a jedna pre dvojrozmerný priestor (R_{1212}).

IV.2 Ricciho tenzor a skalárna krivosť

Skôr než sa budeme zaoberať geometrickým významom Riemannovho-Christoffelovho tenzora, zavedieme ešte jeden tenzor druhého rádu, ktorý vznikne kontrakciou tenzora $R_{\alpha\mu\nu\rho}$ cez prvý a tretí index:

$$R_{\mu\rho} = g^{\alpha\nu} R_{\alpha\mu\nu\rho} = R_{\mu\alpha\rho}^{\alpha}, \quad (\text{IV.5})$$

t.j. položíme v jedenkrát kontravariantnom a trikrát kovariantnom Riemannovom-Christoffelovom tenzore prvý a tretí index rovný a cez tento, teraz už nemý, index sčítame.

Tenzor $R_{\mu\rho}$ sa nazýva *Ricciho tenzor*. Ricciho tenzor je druhého rádu a explicitne ho môžeme zapísať v tvare

$$R_{\mu\rho} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\mu\rho}^{\beta} - \Gamma_{\beta\rho}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}. \quad (\text{IV.6})$$

Zmiešaný Ricciho tenzor píšeme v tvare

$$R^\mu_\rho = g^{\mu\sigma} R_{\sigma\rho},$$

čo dovoľuje ďalšiu kontrakciu

$$R = R^\rho_\rho. \tag{IV.7}$$

Rovnicou (IV.7) je vyjadrená tzv. *skalárna krivosť*.

Na príklade gule si objasníme geometrický význam zavedených tenzorov.

IV.2.1 Riemannov-Christoffelov tenzor, Ricciho tenzor a skalárna krivosť pre povrch gule

Označme polomer guľového povrchu a .

Pre guľový povrch použijeme zovšeobecnené súradnice

$$x^1 = \vartheta, \quad x^2 = \varphi.$$

Nenulové kovariantné zložky metrického tenzora sú

$$g_{11} = a^2, \quad g_{22} = a^2 \sin^2 \vartheta,$$

z čoho dostanme

$$g = \det g_{\mu\nu} = a^4 \sin^2 \vartheta.$$

Nenulové kontravariantné zložky metrického tenzora sú

$$g^{11} = a^{-2}, \quad g^{22} = a^{-2} \sin^{-2} \vartheta.$$

Nenulové Christoffelove symboly potom budú

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta, \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \cotg \vartheta.$$

Jediná *nenulová* zložka Christoffelovho-Riemannovho tenzora je

$$R_{1221} = -a^2 \sin^2 \vartheta.$$

Zložky Ricciho tenzora teda budú

$$R_{12} = 0, \quad R_{21} = 0,$$

$$R_{11} = 1, \quad R_{22} = \sin^2 \vartheta.$$

Skalárna krivosť je

$$R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{2}{a^2} \tag{IV.8}$$

Ďalej uvádzame detaily výpočtu.

Christoffelove symboly

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}g^{1\alpha} \left(\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\alpha} \right) = \clubsuit$$

Na tomto mieste je dôležité uviesť si, že sumujeme cez index α a v tejto sume bude nenulový len člen, pre ktorý $\alpha = 1$. Dostaneme teda

$$\clubsuit = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{12}}{\partial \vartheta} \right) = 0.$$

Podobne sa dajú vypočítať Cristoffelove symboly Γ_{11}^1 , Γ_{22}^2 a Γ_{11}^2 . (Tiež sú nulové.)

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{1\alpha} \left(\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial \vartheta} \right) = \frac{1}{2}a^{-2}(-2a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) =$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{2\alpha} \left(\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \vartheta} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}a^{-2} \sin^{-2} \vartheta (2a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) = \cotg \vartheta.$$

Nenulové zložky *Riemannovho-Christoffelovho tenzora* vypočítame použitím vzťahov (IV.1) a (IV.3).

$$\begin{aligned} R_{1221} &= g_{1\sigma} \left(\frac{\partial \Gamma_{21}^\sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^\sigma}{\partial x^1} + \Gamma_{\beta 2}^\sigma \Gamma_{21}^\beta - \Gamma_{\beta 1}^\sigma \Gamma_{22}^\beta \right) = g_{11} \left(\frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} + \right. \\ &\left. + \Gamma_{\beta 2}^1 \Gamma_{21}^\beta - \Gamma_{\beta 1}^1 \Gamma_{22}^\beta \right) = g_{11} \left(-\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^1 \right) = a^2 \left[-\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial \vartheta} + \left(-\frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right) \cotg \vartheta \right] = \end{aligned}$$

$$a^2 \left(\cos 2\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) = a^2 \left(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta \right) = -a^2 \sin^2 \vartheta.$$

Použitím (IV.6) môžeme určiť komponenty *Ricciho tenzora*.

$$R_{12} = \frac{\partial \Gamma_{12}^\sigma}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma_{1\sigma}^\sigma}{\partial x^2} + \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma \Gamma_{12}^\beta - \Gamma_{\beta 2}^\sigma \Gamma_{1\sigma}^\beta = \frac{\partial(\cotg \vartheta)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\cotg \vartheta)}{\partial \varphi} = 0.$$

Podobne

$$R_{21} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^\sigma}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma_{1\sigma}^\sigma}{\partial x^1} + \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma \Gamma_{11}^\beta - \Gamma_{\beta 1}^\sigma \Gamma_{1\sigma}^\beta = -\frac{\partial(\cot g \vartheta)}{\partial \vartheta} - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 = \\
 &= \frac{1}{\sin^2 \vartheta} - \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} = \frac{1 - \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} = 1, \\
 R_{22} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^\sigma}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma_{1\sigma}^\sigma}{\partial x^1} + \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma \Gamma_{22}^\beta - \Gamma_{\beta 2}^\sigma \Gamma_{2\sigma}^\beta = \\
 &= -\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta + \cot g \vartheta \left(-\frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right) + 2 \left(\sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) = \\
 &= -\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta + 2 \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta.
 \end{aligned}$$

IV.3 Geometrický význam Riemannovho-Christoffelovho tenzora, Ricciho tenzora a skalárnej krivosti

Na prelome 18. a 19. storočia založil Gauss modernú diferenciálnu geometriu štúdiom vnútornej geometrie plôch, t.j. štúdiom takých vlastností plôch, ktoré môžeme získať meraním priamo na ploche bez toho, aby sme z plochy vystúpili do trojrozmerného priestoru, v ktorom je ponorená. Takou vlastnosťou je aj *krivosť plochy v bode*. Z jej definície vyplynulo takéto meranie krivosti: V bode plochy vedieme normálu na plochu, ňou vedieme roviny, pretínajúce plochu v krivkách, ležiacich na ploche a prechádzajúcich daným bodom. Meriame polomery krivosti týchto kriviek v bode, z nich vyberieme najväčší R a najmenší r a Gaussova krivosť sa určí ako $k = \frac{1}{Rr}$, t.j. ako súčin krivostí týchto kriviek².

Pre guľu je $R = r = a$ ³, preto jej Gaussova krivosť je v každom bode $\frac{1}{a^2}$. V sedlovom (hyperbolickom) bode plochy majú tieto polomery opačné znamienka (t.j. stredy krivosti sú na rôznych stranách plochy) a krivosť je záporná. V parabolických bodoch $R = \infty$ a krivosť je nulová (povrch valca, alebo kužeľa).

Vlastnosť skalárnej krivosti $R \sim$ Gaussova krivosť v bode, ktorú sme ukázali na príklade gule, platí všeobecne a to nielen pre plochy, ale aj pre priestory vyššej dimenzie (trojrozmerné nadplochy v štorozmernom priestore, celý štvorrozmerný priestor). „Krivosť“ v tomto všeobecnom prípade znamená pomerne zložitú vlastnosť, vzdialenú od obvyčajnej krivosti krivky, alebo plochy.

Pre geometrický význam tenzorov R , $R_{\mu\rho}$ a $R_{\mu\nu\rho}^\alpha$ je dôležité toto:

1. Sú istou charakteristikou *krivosti* priestoru.
2. V priestore, kde element dĺžky sa dá vyjadriť ako

$$ds^2 = a_\rho (dx^\rho)^2, \quad a_\rho = \text{const.}, \quad (\text{IV.9})$$

sú všetky Christoffelove symboly nulové $\Gamma_{\rho\nu}^\mu \equiv 0$ a preto tiež

$$R_{\mu\rho} \equiv 0, \quad R_{\mu\nu\rho}^\alpha \equiv 0, \quad R \equiv 0. \quad (\text{IV.10})$$

²Krivosť krivky s polomerom krivosti ρ je ρ^{-1} .

³ a je polomer gule

Priestory pre ktoré platí (IV.10) nazývame *nezakrivené*, alebo *rovinné*⁴. Teda nulovosť všetkých zložiek Riemannovho-Christoffelovho tenzora a tenzora Ricciho znamená nezakrivenosť priestoru. Toto je invariantná vlastnosť priestoru, lebo nulovosť tenzora znamená jeho nulovosť vo všetkých súradnicových sústavách. Naopak, v zakrivenom priestore nemôže platíť (IV.10) identicky vo všetkých bodoch priestoru.

Všimnime si ešte, že samotné Christoffelove symboly nemusia byť nulové vo všetkých súradnicových sústavách, lebo sa netransformujú ako tenzor. (Pozri nasledujúcu úlohu.)

Úloha: V rovine zaveďte polárne súradnice a určte ds^2 v týchto súradniciach. Ukážte, že nie všetky $\Gamma_{\rho\nu}^{\mu}$ sú nulové, ale R , $R_{\mu\nu}$ a $R_{\alpha\mu\nu\rho}$ sú nulové, ako v rovine očakávame.

Riešenie:

- Transformáciou z $dx^2 + dy^2$ dostaneme

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

- Výpočtom dostaneme tieto nenulové Christoffelove symboly:

$$\Gamma_{22}^1 = -r,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}.$$

Ostatné Christoffelove symboly sú nulové.

- Priamym výpočtom dostaneme:

$$R_{1221} \equiv 0,$$

$$R_{11} = R_{12} = R_{21} = R_{22} \equiv 0,$$

$$R = 0.$$

Pre nezakrivené priestory sú charakteristické priamkové geodetické čiary. Na príklade polárnych súradníc v rovine môžeme ukázať, že táto vlastnosť priestoru sa zachová aj vtedy, keď súradnice nebudú kartézske a nie všetky Christoffelove symboly budú rovné nule.

Úloha: Zostavte a riešte úlohu pre geodetické čiary v polárnych súradniciach.

⁴v angl. lit. *flat space*, v ruskej lit. плоское пространство.

Riešenie: Z predchádzajúcej úlohy vieme

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Teda

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2,$$

$$x^1 = r, \quad x^2 = \varphi.$$

Pre nenulové geodetické čiary dostávame tieto dve rovnice.

1. rovnica:

$$\frac{d}{ds}(g_{11}u^1) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^1} u^\nu u^\nu = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dr}{ds} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - r \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0 \tag{1}$$

2. rovnica:

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \tag{2}$$

K tomu pridáme prvý integrál pohybu:

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 1 \tag{3}$$

Po násobení rovnice (1) r a sčítaní s rovnicou (3) dostaneme

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r \frac{d^2 r}{ds} = 1.$$

Po úprave ľavej strany

$$\frac{d}{ds} \left(r \frac{dr}{ds} \right) = 1. \tag{4}$$

Túto rovnicu integrujeme dvojnásobnou kvadrátúrou:

$$d \left(r \frac{dr}{ds} \right) = ds \Rightarrow r \frac{dr}{ds} = s + C \Rightarrow r dr = (s + C) ds \Rightarrow \frac{r^2}{2} = \frac{s^2}{2} + Cs + C_0$$

Vhodnou kombináciou integračných konštánt C a C_0 môžeme dať riešeniu tvar

$$r^2 = (s - C_1)^2 + C_0^2. \tag{5}$$

Riešením rovnice (2) máme

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = K_1$$

a po dosadení za r^2 z (5) dostaneme

$$d\varphi = \frac{K_1 ds}{(s - C_1)^2 + C_0^2}$$

a po integrovaní

$$\varphi - K_0 = \operatorname{arctg} \frac{s - C_1}{C_0} K,$$

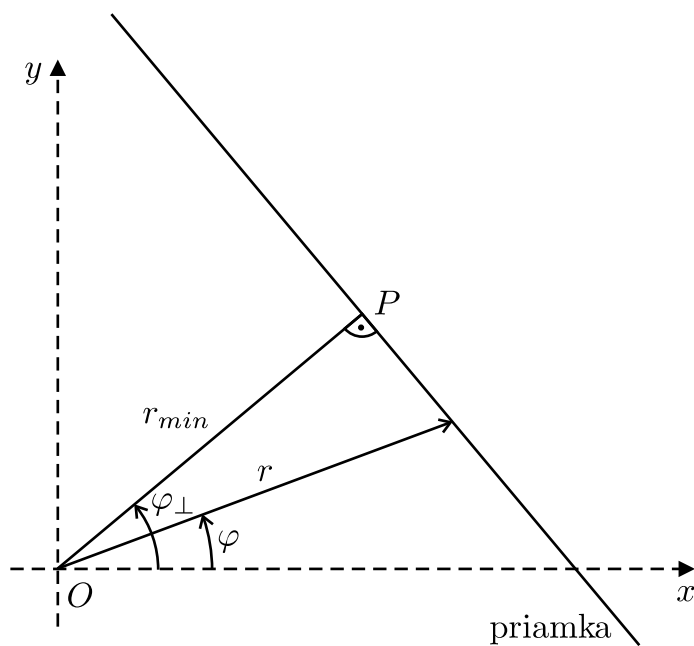
kde integračná konštanta $K = \frac{K_1}{C_0^2}$ a teda

$$\frac{s - C_1}{C_0} = \operatorname{tg} \frac{\varphi - K_0}{K}. \quad (6)$$

Rovnice geodetických línií dostaneme dosadením (6) do (5), t.j. vylúčením parametra s :

$$r^2 = C_0^2 \left[\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi - K_0}{K} + 1 \right] \quad (7)$$

Zmysel integračných konštánt a skutočnosť, že rovnica (7) naozaj predstavuje priamku, ľahko nájdeme porovnaním s nasledujúcim obrázkom:



Z $\triangle OPX$ z Pythagorovej vety platí:

$$r^2 = r_{min}^2 + [r_{min} \operatorname{tg}(\varphi_{\perp} - \varphi)]^2 = r_{min}^2 [\operatorname{tg}^2(\varphi_{\perp} - \varphi) + 1].$$

Ako možno vidieť ide o rovnicu priamky.

Integračná konštanta C_1 vypadla z rovnice (7) vylúčením parametra s . Ak by sme odčítali s na priamke od bodu P , t.j. $s(P) = 0$, potom $C_1 = 0$.

IV.4 Kovariantná divergencia zmiešaného Ricciho tenzora $R_{\nu;\mu}^{\mu}$

Posledný geometrický vzťah, ktorý budeme pri zostavovaní Einsteinových rovníc poľa potrebovať je *nenulovosť* tzv. *kovariantnej divergencie Ricciho tenzora*. Názov *kovariantná divergencia* má pôvod v skutočnosti, že pripomína obyčajnú divergenciu vektora. Z tohto dôvodu sa niekedy hovorí aj o *vektorovej divergencii* tenzora R_{ν}^{μ} .

Nenulovosť kovariantnej divergencie Ricciho tenzora môžeme zapísať v tvare

$$R_{\nu;\mu}^{\mu} = R_{\nu;0}^0 + R_{\nu;1}^1 + R_{\nu;2}^2 + R_{\nu;3}^3 = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^{\nu}} \neq 0, \quad (\text{IV.11})$$

kde $\nu = 0, 1, 2, 3$.

V dôkaze tvrdenia (IV.11) budeme vychádzať z Bianchiho identity (IV.4)

$$R_{\beta\rho\mu;\nu}^{\alpha} + R_{\beta\nu\rho;\mu}^{\alpha} + R_{\beta\mu\nu;\rho}^{\alpha} = 0$$

a postupne kontrahujeme cez $\alpha = \mu$ (t.j. 1. a 4. index) a potom cez $\beta = \rho$ (t.j. 2. a 3. index).

Pre $\alpha = \mu$ máme

$$R_{\beta\rho\mu;\nu}^{\mu} + R_{\beta\nu\rho;\mu}^{\mu} + R_{\beta\mu\nu;\rho}^{\mu} = 0,$$

z čoho dostávame

$$R_{\beta\nu\rho;\mu}^{\mu} + R_{\beta\nu;\rho} - R_{\beta\rho;\nu} = 0.$$

Na druhú kontrakciu musíme zdvihnúť index β . Násobíme celú rovnicu $g^{\beta\omega}$ a okamžite môžeme cez index β sčítať.

$$g^{\beta\omega} R_{\beta\nu\rho;\mu}^{\mu} + g^{\beta\omega} R_{\beta\nu;\rho} - g^{\beta\omega} R_{\beta\rho;\nu} = 0.$$

Keďže $g^{\beta\omega}$ je vzhľadom na kovariantné derivovanie konštantna, t.j. $g^{\beta\omega}_{;\nu} = 0$, máme

$$(g^{\beta\omega} R_{\beta\nu\rho}^{\mu})_{;\nu} + (g^{\beta\omega} R_{\beta\nu})_{;\rho} - (g^{\beta\omega} R_{\beta\rho})_{;\nu} = 0$$

a teda

$$R^{\mu\omega}_{\nu\rho;\mu} + R^{\omega}_{\nu;\rho} - R^{\omega}_{\rho;\nu} = 0.$$

Ak teraz položíme $\omega = \rho$ a sčítame, dostaneme

$$R^{\mu}_{\nu;\mu} + R^{\rho}_{\nu;\rho} - R^{\rho}_{\rho;\nu} = 0.$$

Keďže $R^{\rho}_{\rho} \equiv R$ bude konečný výsledok

$$2R^{\mu}_{\nu;\mu} = \frac{dR}{dx^{\nu}}.$$

Tým sme ukončili stručný popis geometrických vlastností pseudoriemannovych priestorov a podľa schémy na začiatku kapitoly IV sa teraz budeme stručne venovať popisu rozloženia pohybujúcej sa hmoty, t.j. pravým stranám rovníc gravitačného poľa podľa tabuľky [1].

IV.5 Tenzor energie-hybnosti makroskopických telies

V klasickej mechanike sa stretávame s charakteristickými veličinami- hustotou energie ε a a tlakom, ktoré majú charakter skalárnych veličín nezávisle sa meniace pri prechode k inej vzťažnej sústave.

V špeciálnej teórii relativity sú navzájom zviazané a vstupujú do jedného objektu-tenzora energie-hybnosti.

Pripomeňme, že ak máme spojitou rozloženú hmotnosť (teleso, kvapalina, plyn), potom štvorvektor energie-hybnosti $p^\mu \equiv (p^0; \vec{p})$ sa dá vyjadriť cez nový tenzor $T^{\mu\nu}$ nasledujúcim spôsobom

$$p^0 = \frac{1}{c} \int T^{00} dV,$$

$$p^i = \frac{1}{c} \int T^{i0} dV,$$

kde $i = 1, 2, 3$, integrovanie cez hyperrovinu $x^0 = \text{const}$.

Tenzor $T^{\mu\nu}$ teda charakterizuje rozloženie hmotnosti resp. energie v kontinuu. V pokojovej sústave makroskopického telesa je tenzor energie-hybnosti diagonálny

$$T^{\mu\nu} \equiv \text{diag}(\varepsilon, p, p, p) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

Zložky tenzora energie-hybnosti v pohybujúcej sa sústave môžeme vyjadriť vo všeobecnom tvare

$$T^{\mu\nu} = (p + \varepsilon)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (\text{IV.13})$$

V zmiešanom tvare máme

$$T^\mu_\nu = (p + \varepsilon)u_\nu u^\mu - p\delta^\mu_\nu. \quad (\text{IV.14})$$

IV.5.1 Niektoré vlastnosti tenzora energie-hybnosti

1. Zo zápisov (IV.12), (IV.13) a (IV.14) vyplýva jeho *symetričnosť*

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (\text{IV.15})$$

2. Platí

$$T^\mu_\mu = (p + \varepsilon)u_\mu u^\mu - p\delta^\mu_\mu = (p + \varepsilon) - 4p = \varepsilon - 3p. \quad (\text{IV.16})$$

3. Dá sa ukázať⁵

$$T^\mu_\mu = \varepsilon - 3p \geq 0 \quad (\text{IV.17})$$

⁵pozri Landau, Lifšic: *Teorija polja, Moskva, Nauka, 1973.*

a teda

$$p \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{IV.18})$$

platí *vždy*.

Stavová rovnica ultrarelativistického plynu $pV = \frac{1}{3}E$ dáva vo vzťahu (IV.18) rovnosť. To isté platí aj pre plyn fotónov. Nerelativistické riešenie z termodynamiky $pV = \frac{2}{3}E$ nezapočítava pokojovú energiu častíc. Po jej započítaní bude (IV.18) s rezervou splnené.

4. V špeciálnej teórii relativity platí

$$\frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \equiv 0,$$

teda štvordivergencia T_{ν}^{μ} je nulová (zachovanie energie-hybnosti). Vo všeobecnej teórii relativity platí

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} \equiv 0, \quad (\text{IV.19})$$

čiže divergencia je *identicky nulová*.

IV.6 Einsteinov tenzor a rovnice gravitačného poľa

Teraz môžeme pristúpiť k syntéze spomínanej na začiatku IV. kapitoly. Zhrňme doterajšie znalosti o budúcich rovniciach.

1. Rovnica musí byť *tenzorová*, aby platila vo všetkých vzájomných sústavách a bola voči príslušným transformáciám *kovariantná*.
2. V najjednoduchšom prípade bude mať rovnica tvar

$$f_1(\text{Ricciho tenzor}; g_{\mu\nu}) = f_2(T_{\nu}^{\mu})$$

tak, aby vzhľadom ku $g_{\mu\nu}$ išlo o parciálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu. Funkcie f_1 a f_2 by mohli byť *lineárne*.

3. V klasickej limite by mali rovnice prejsť na riešenie *Poissonovej rovnice*.
4. Samotný Ricciho tenzor nie je vhodný na najjednoduchšiu rovnicu typu

$$R_{\nu}^{\mu} = \text{const.} T_{\nu}^{\mu},$$

lebo tento tenzor nemá nulovú kovariantnú divergenciu (pozri (IV.11)), zatiaľ čo pre tenzor energie-hybnosti je to základná vlastnosť (pozri IV.19).

IV.6.1 Einsteinov tenzor

Vzhľadom k poslednej požiadavke navrhol Einstein nahradit' Ricciho tenzor, ktorý nespĺňa (IV.19) tenzorom

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{IV.20})$$

Tento tenzor nazývame *Einsteinov tenzor*.

Einsteinov tenzor má požadovanú vlastnosť

$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0. \quad (\text{IV.21})$$

V dôkaze rovnosti (IV.21) vyjdeme zo vzťahu (IV.11), t.j.

$$R^{\mu}_{\nu;\mu} - \frac{1}{2}R_{;\nu} = 0. \quad (\text{IV.11})$$

Túto rovnicu násobíme $g^{\rho\nu}$

$$g^{\rho\nu}R^{\mu}_{\nu;\mu} - \frac{1}{2}g^{\rho\nu}R_{;\nu} = 0.$$

V druhom sčítanci zameníme sčítací index ν za μ a môžeme písať

$$(g^{\rho\nu}R^{\mu}_{\nu})_{;\mu} - \frac{1}{2}(g^{\rho\mu}R)_{;\mu} = 0,$$

kde sme využili vlastnosť, že $g^{\rho\nu}$ je pri kovariantnom derivovaní konštantou. Ďalej dostávame

$$R^{\mu\rho}_{;\mu} - \frac{1}{2}(g^{\rho\mu}R)_{;\mu} = 0,$$

odkiaľ

$$\left(R^{\mu\rho} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\rho}\right)_{;\mu} = 0$$

IV.6.2 Rovnice gravitačného poľa

Einstein v roku 1915 navrhol tieto rovnice pre gravitačné pole ⁶

$$G_{\mu\nu} = \text{const.}T_{\mu\nu},$$

pričom konštantu určíme prechodom k Newtonovmu (nerelativistickému) gravitačnému poľu (Musíme dostať Poissonovu rovnicu.)

$$\text{const.} = \frac{8\pi k}{c^4}, \quad (\text{IV.22})$$

⁶pozri *A. Einstein, Annalen der Physik*, **49**, (1916), 769

kde $k = 6.67259(85) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ ⁷.

Máme teda tieto formy Einsteinových rovníc gravitačného poľa

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (IV.23a)$$

a pre zmišané tenzory

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{\nu}^{\mu} \quad (IV.23b)$$

Kontrahovaním tejto rovnice pri $\mu = \nu$ dostaneme

$$R - \frac{1}{2}4R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{\mu\mu}$$

a teda

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4}T_{\mu}^{\mu}$$

a dosadením do (IV.23a) dostaneme ešte jeden tvar

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \quad (IV.23c)$$

kde $T = T_{\mu}^{\mu}$ (kontrahovaný tenzor energie-hybnosti).

Poznámky:

1. Najprv niektoré historické.

(a) V pôvodných Einsteinových rovniciach stál namiesto R výraz $(R - 2\Lambda)$, kde Λ je tzv. *kozmozlogická konštanta*, ktorú pôvodne zaviedol Einstein, aby získal *statické* riešenie svojich rovníc. Po objave pohybu galaxií, ktorý urobil Hubble, nebola nutnosť statických riešení a Einstein sa kozmozlogickej konštanty vzdal⁸. V súčasnosti sa však opäť diskutuje o *možnosti nenulovej konštanty* Λ v súvislosti s teóriou superstrún a pod.

(b) Často sa používa konštanta $\kappa = \frac{8\pi k}{c^4}$, ktorá sa nazýva *Einsteinova gravitačná konštanta*.

2. V rôznych prácach môžu mať Einsteinove rovnice odlišnú formu, lebo na ich tvar vplýva viacero faktorov. Definícia Ricciho tenzora nie je jednotná. Riemannov-Christoffelov tenzor totiž môžeme kontrahovať aj cez 1. a 4. index. Potom je znamienko všetkých zložiek i skalárnej krivosti opačné, než v našich rovniciach. Tenzor T_{ν}^{μ} obsahuje $u^{\mu}u_{\nu}$ a norma tohto štvorvektora môže byť rôzna, čo sa prejaví vo faktore c resp. c^2 v Einsteinových rovniciach.

3. Napriek množstvu alternatívnych teórií a zovšeobecnení Einsteinových rovníc je Einsteinova teória gravitácie *fakticky jediná*, ktorá odolala dlhým rokom experimentálneho preverovania a kritiky.

⁷Newtonova gravitačná konštanta z roku 1993

⁸„Kedykoľvek som niečo označil Λ , vždy s tým boli problémy.“ (Einstein)

IV.6.3 Zmysel Einsteinovych rovníc

Pri $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ide z matematického hľadiska o 10 parciálnych diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie $g_{\mu\nu}$. Dôležitými vlastnosťami týchto rovníc sú skutočnosti, že sú

1. druhého rádu,
2. silne nelineárne,
3. len 6 z nich je vo všeobecnosti nezávislých.

Zmysel rovníc je *nájsť geometriu časopriestoru* v závislosti od rozloženia gravitujúcej hmoty, t.j. *nájsť metrický tenzor $g_{\mu\nu}$* (t.j. *lokálne* vlastnosti), ale aj *globálne* vlastnosti časopriestoru.

Na základe Einsteinovych rovníc gravitačného poľa nie je možné tvrdiť, že príčinou gravitácie je krivosť časopriestoru. Je možné len tvrdiť, že ak má časopriestor reprezentovať gravitačné a mechanické vlastnosti hmôt, potom Ricciho tenzor a tiež Riemannov-Christoffelov tenzor nemôže byť nulový a preto časopriestor musí byť zakrivený. Opačné tvrdenie neplatí (!).

V Centrálné symetrické gravitačné pole

Riešenie Einsteinových rovníc je veľmi zložitá úloha. Pomerne jednoduchý je prípad centrálné symetrického poľa, vytváraného guľovým telesom hmotnosti M , pričom ostatný priestor je prázdny.

Úloha je zároveň dôležitá, lebo vedie na experimentálne overiteľné výsledky. Tieto riešenia vykonal nemecký astronóm Karl Schwarzschild v roku 1916.

Schwarzschild navrhol metriku, v ktorej použil uhlové premenné ako na guľi, typu

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (\text{V.1})$$

odkiaľ máme sférické súradnice pre priestor

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \vartheta, \quad x^3 = \varphi,$$

pričom platí, že $\nu \equiv \nu(r, t)$ a $\lambda \equiv \lambda(r, t)$. Nenulové zložky metrického tenzora potom budú

$$\begin{aligned} g_{00} &= e^\nu, & g_{11} &= -e^\lambda, & g_{22} &= -r^2, & g_{33} &= -r^2 \sin^2\vartheta, \\ g^{00} &= e^{-\nu}, & g^{11} &= -e^{-\lambda}, & g^{22} &= -r^{-2}, & g^{33} &= -r^{-2} \sin^{-2}\vartheta. \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

Pre jednoduchší zápis označme

$$' \equiv \frac{d}{dr}, \quad \cdot \equiv \frac{d}{d(ct)}.$$

Nenulové Christoffelove symboly potom môžeme vyjadriť v tvare (detaily nasledujúcich výpočtov sú v dodatku A na strane 62):

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, & \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2\vartheta e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\vartheta \cos\vartheta, & \Gamma_{23}^3 &= \cotg\vartheta. \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Ostatné Christoffelove symboly (s výnimkou výmeny dolných indexov) sú nulové.

Ďalej vypočítame zložky Ricciho tenzora R_μ^ν a dosadíme do rovníc (IV.23b). Ľavá strana rovníc bude nenulová len pre R_0^0 , R_0^1 , R_1^1 , R_2^2 a R_3^3 . Máme teda tieto Einsteinove rovnice (ľavá a pravá strana sú vymenené)

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (\text{V.4a})$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi k}{c^4} T_3^3 &= -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{V.4b})$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^0 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (\text{V.4c})$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^1 = e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}. \quad (\text{V.4d})$$

Mimo centrálného telesa je $T_\mu^{nu} \equiv 0$. Okrem toho sa dá ukázať, že rovnica (V.4b) je dôsledkom ostatných. Máme teda tieto nezávislé rovnice

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (\text{V.5a})$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (\text{V.5c})$$

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (\text{V.5d})$$

Z rovnice (V.5d) vyplýva, že λ *nezávisí na čase*. Toto Schwarzschild spočiatku predpokladal, ale je to dôsledok jeho rovníc a platí ešte všeobecnejšie v centrálnom poli aj pri nenulovom T_ν^μ (*Birkhoffova teória*).

Sčítaním (V.5a) a (V.5c) dostaneme

$$\nu' + \lambda' = 0,$$

t.j.

$$\nu + \lambda = f(t).$$

$f(t)$ môžeme položiť rovné 0, ako vidieť z tejto úvahy:

$$\underbrace{\nu - f(t)}_{\text{nové } \nu^*(r,t)} + \lambda = 0$$

a v ds^2 by bol člen

$$e^{\nu^*} c^2 dt^2 = e^\nu c^2 dt^{*2},$$

takže by išlo len o inú časovú stupnicu. Bez straty všeobecnosti teda máme

$$\nu + \lambda = 0$$

a teda

$$e^{-\lambda} = e^\nu. \quad (\text{V.6})$$

Z rovnice (V.5c) dostaneme

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{e^{-\lambda} - 1}{e^{-\lambda} r},$$

odkiaľ máme

$$-\int \frac{dr}{r} = \int \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Túto rovnice riešime substitúciou $y = e^{-\lambda}$ a dostávame.

$$\begin{aligned} -\int \frac{dy}{y-1} &= \int \frac{dr}{r} \\ -\ln(y-1) &= \ln r - \ln c \\ \ln(y-1) &= -\ln \frac{r}{c} = \ln \frac{\text{const.}}{r} \\ e^{-\lambda} &= 1 + \frac{\text{const.}}{r} = e^{\nu}. \end{aligned} \tag{V.7}$$

Integračnú konštantu určíme z úvah, že pre $r \rightarrow \infty$ musí byť metrika Newtonova, t.j.

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2},$$

kde $\varphi = -\frac{kM}{r}$. Teda

$$1 + \frac{\text{const.}}{r} = 1 - \frac{2kM}{rc^2} \Rightarrow \text{const.} = -\frac{2kM}{c^2}$$

Integračná konštantá má charakter dĺžky (t.j. $[\text{const.}] = \text{meter}$) a preto ju označujeme

$$r_g = \frac{2kM}{c^2} \tag{V.8}$$

a nazývame *gravitačný polomer* telesa.

Z vykonaných úvah máme konečný tvar metriky

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \tag{V.9}$$

Túto metriku nazývame *Schwarzschildova metrika*.

Z rovnice (V.9) možno vidieť, že pre $r = r_g$ je Schwarzschildova metrika singulárna, ale súdilo sa, že to nevádi, lebo r_g je vždy vnútri reálnych telies. Napríklad pre *Slnko* je $r_{g\odot} = 2.956\text{km}$ a pre *Zem* $r_{g\oplus} = 0.89\text{cm}$. Neskôr sa ukázalo, že $r_g > R_{\text{telesa}}$ tiež môže byť, ale zároveň sa vyjasnilo, že singularita je odstrániteľná⁹.

V.1 Pohyb častice a svetla v Schwarzschildovom gravitačnom poli

Teraz sa úloha, podobne ako v Newtonovom prípade, redukuje na čistú kinematiku. Zostavíme rovnice pre nenulové geodetické čiary.

⁹Pozri kapitolu VI.

pre ct :

$$\frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dct}{ds} \right] = 0, \quad (\text{V.10a})$$

pre ϑ :

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{ds} \right) - r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (\text{V.10b})$$

pre φ :

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0, \quad (\text{V.10c})$$

a namiesto rovnice pre $r(=x^1)$ použijeme prvý integrál pohybu

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{dct}{ds} \right)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 1. \quad (\text{V.10d})$$

Z týchto rovníc môžeme určiť

- a.) Radiálny pohyb častice, prichádzajúcej k centrálnemu telesu z $r = \infty$, $d\vartheta = 0$, $d\varphi = 0$.
- b.) Dráhy planét, t.j. pohyb v rovine obsahujúcej bod $r = 0$, $\frac{d\vartheta}{ds} = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.
- c.) Pohyb svetelných lúčov, $ds = 0$.

Teraz nasledujú detaily výpočtov potrebných pre výpočet pohybu častice a svetla v Schwarzschildovom gravitačnom poli (*overenie všeobecnej teórie relativity — klasické merania*).

a.) Radiálny pohyb častice

Z rovnice (V.10a) po integrovaní máme

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dct}{ds} = \gamma_\infty,$$

t.j.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\gamma_\infty}{c} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \quad (\text{V.11})$$

kde γ_∞ je integračná konštanta.

Z (V.10d) a (V.11) s použitím vzťahu $\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds}$ dostaneme

$$\frac{1}{\gamma_\infty^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right\} \quad (\text{V.12})$$

Označme výraz v zloženej zátvorke, ktorý má rozmer druhej mocniny rýchlosti ako q^2 . Teda

$$q^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (\text{V.13})$$

Potom

$$\frac{1}{\gamma_\infty^2} = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} - \frac{q^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2} \quad (\text{V.14})$$

a z toho po úprave

$$\frac{q^2}{c^2} = \frac{\gamma_\infty^2}{4} - \left[\frac{\gamma_\infty}{2} - \frac{1}{\gamma_\infty} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right]^2 \quad (\text{V.15})$$

Pre $r \rightarrow \infty$ nech $q \rightarrow V_\infty$. Potom z (V.15) platí

$$\frac{1}{\gamma_\infty^2} = \left(1 - \frac{V_\infty^2}{c^2}\right) \quad (\text{V.16})$$

Rovnica (V.16) určuje zmysel integračnej konštanty γ_∞ a ukazuje, že pri $r \rightarrow \infty$ dostávame Minkowského prípad.

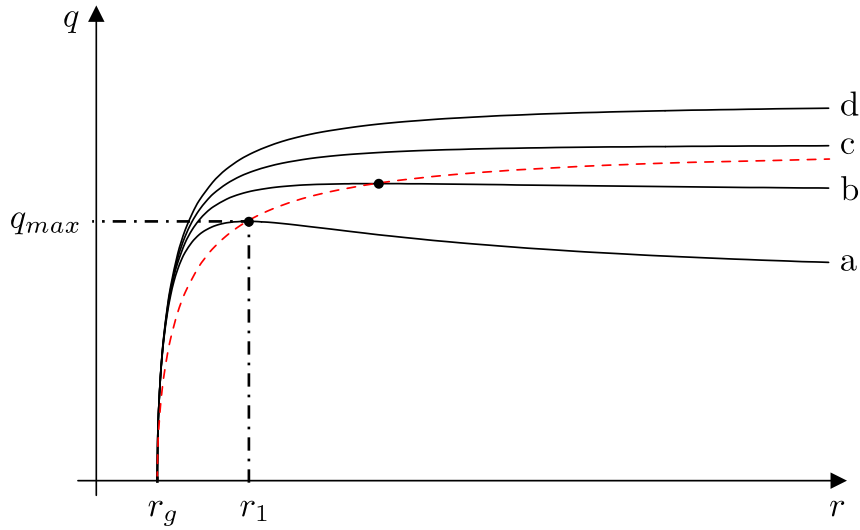
Pre čisto radiálny pohyb ($d\vartheta = d\varphi = 0$) máme z rovnice (V.13)

$$q = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{dt} \quad (\text{V.17})$$

Je zaujímavé, že rýchlosť radiálne padajúcej častice má extrém. Ak derivujeme (V.15) podľa t a použijeme (V.17), dostaneme

$$\frac{dq}{dt} = \frac{c^2 r_g}{\gamma_\infty r^2} \left\{ \frac{\gamma_\infty}{2} - \frac{1}{\gamma_\infty} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right\} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{V.18})$$

Záver: (Pozri obrázok 1)



Obrázok 1: Závislosť rýchlosti q na vzdialenosti od telesa pri počiatočnej rýchlosti V_∞ rovnnej a) $0,4c$, b) $0,6c$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}c$, d) $0,8c$.

1. Pri

$$r_1 = 2r_g \frac{\left(1 - \frac{V_\infty^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2V_\infty^2}{c^2}\right)} \quad (\text{V.19})$$

máme

$$q_{max} = \frac{1}{2}c \left(1 - \frac{V_\infty^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{V.20})$$

2. Pri $r = r_g$ je rýchlosť nulová.

3. Ak $r_1 > 0$ (teda ak sa má rýchlosť najprv zvyšovať), potom menovateľ v (V.19) musí byť kladný, teda $V_\infty < \frac{c}{\sqrt{2}}$, z čoho plynie $\frac{c}{\sqrt{2}} > q_{max} \geq \frac{c}{2}$.

Teda ak častica štartuje pri $r \rightarrow \infty$ s rýchlosťou $V_\infty \in \left(\frac{c}{\sqrt{2}}, c\right)$, je v gravitačnom poli spomaľovaná tak, aby na r_g mala rýchlosť nulovú.

Za úlohu porovnajte tieto závery s analogickým správaním častice pri rovnomernej zrýchlenom pohybe.

b.) Dráhy planét

Pohyb je rovinný v 'rovníkovej' rovine. Rovnica (V.10b) je identicky splnená a integrovaním (V.10c) dostávame

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = hc, \quad (\text{V.21})$$

kde h je integračná konštanta. Integrál pohybu (V.10d) s použitím vzťahu (V.11) vedie ku vzťahu

$$1 = \gamma_\infty^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} - \frac{h^2}{r^4} \left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 \right] \quad (\text{V.22})$$

Zavedieme novú premennú

$$u = \frac{1}{r} \quad (\text{V.23})$$

a úpravou (V.22) dostaneme

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2(1 - r_g u) = \frac{\gamma_\infty^2 - 1}{h^2} + \frac{r_g}{h^2} u. \quad (\text{V.24})$$

Derivovaním podľa φ dostaneme základnú rovnicu pre náš výpočet

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{r_g}{2h^2} + \frac{3}{2} r_g u^2. \quad (\text{V.25})$$

V nultom priblížení, t.j. pri $3r_g u^2 \ll \frac{r_g}{h^2}$ dostávame rovnicu kužeľosečky

$$pu = 1 + e \cos(\varphi - \omega), \quad (\text{V.26})$$

kde $p = \frac{2h^2}{r_g}$ je konštanta z pravej strany nultého priblíženia, e a ω sú integračné konštanty.

Teraz pridáme poruchu $\frac{3}{2} r_g u^2$ a hľadáme riešenie v tvare (pozri obrázok 3)

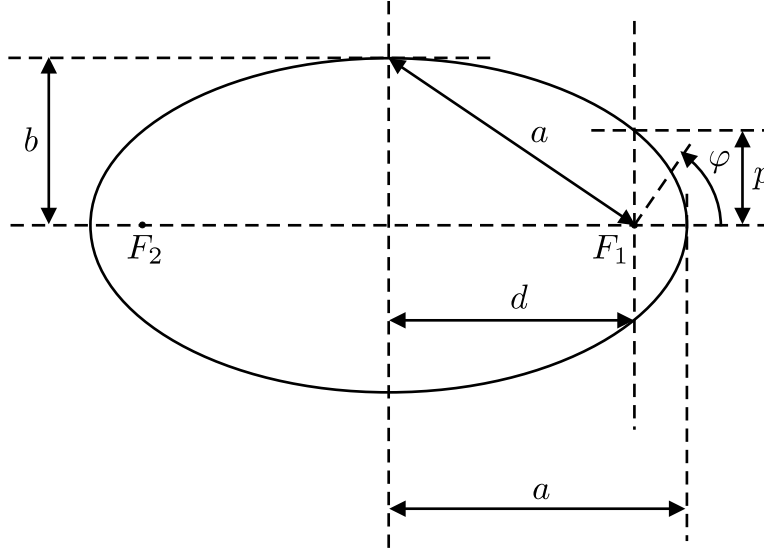
$$p'u = 1 + \cos \chi, \quad \chi = (1 - \varepsilon)(\varphi - \omega). \quad (\text{V.27})$$

Dosadíme do (V.25) a dostaneme

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{3}{2} \frac{r_g}{p'^2},$$

(čo teraz nie je dôležité), ale

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{r_g}{p} = \frac{3}{2} \frac{r_g}{a(1 - e^2)}. \quad (\text{V.28})$$



Obrázok 2: Veličiny a , b , d určíme z pozorovania dráhy planéty, excentricita je $d = \sqrt{a^2 - b^2}$, číselná excentricita je $e = \frac{d}{a}$ a $p = a(1 - e^2) \leq b$. Obrázok je pri $\omega = 0$.

Maximá χ sú oddelené intervalmi 2π , čo pre $\varphi - \omega$ znamená podľa (V.27) intervaly $\frac{2\pi}{1 - \varepsilon} \doteq 2\pi(1 + \varepsilon)$ pre malé ε
 Posun perihélia teda je

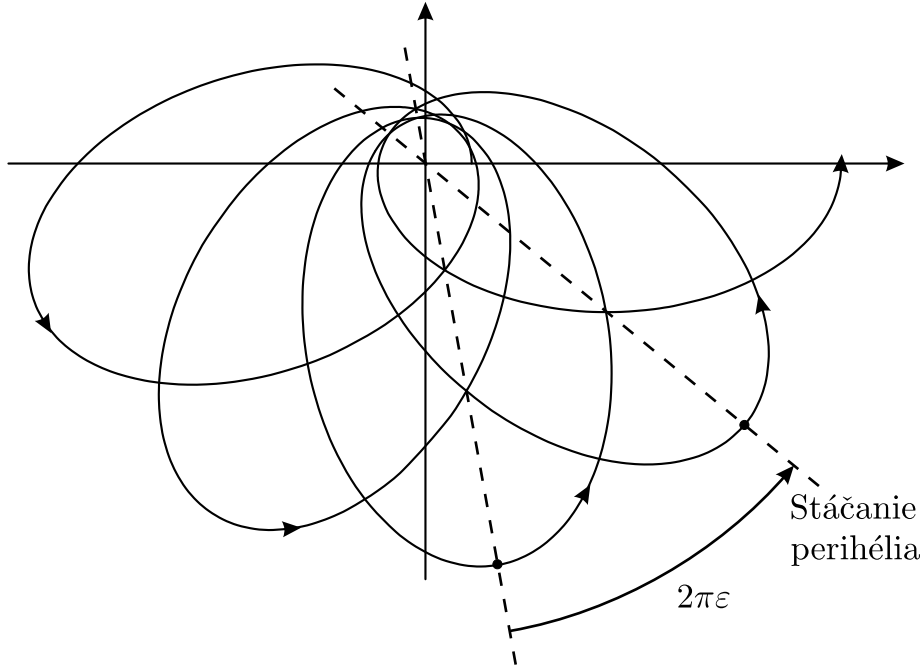
$$\Delta\varphi = 2\pi\varepsilon = 3\pi \frac{r_g}{a(1 - e^2)} \text{rad} = 3\pi \frac{r_g}{a(1 - e^2)} (2,06265 \cdot 10^5)'' . \quad (\text{V.29})$$

Pre Merkúr za storočie namerané $5599'',74$, poruchami od ostatných planét sa dá v rámci Newtonovej teórie vysvetliť $5557'',18$, zostáva $42'',15$. Vzorec (V.29) dáva $43'',15$.

Novší výsledok v tejto oblasti sa týka binárneho pulzaru PSR 1913+16, ktorý bol objavený roku 1974 v súhvezdí Orla. Ide o dve neutrónové hviezdy s polomeri 15km a hmotnosťami $1,4M_\odot$. Vzdialenosť medzi jednotlivými zložkami je 1 milión km a obežná doba je $7,75\text{h}$. Posun periastrónu jednej hviezdy má byť podľa všeobecnej teórie relativity $4,23^\circ$ za rok! Potvrdená bola tiež strata energie gravitačným žiarením, ktorá sa prejavuje skracovaním obežnej doby o $75\mu\text{s}$ za rok. Experiment vs. teória dáva rozdiel $0,3\%$.

Ako kuriozitu na margo tohto problému môžeme spomenúť, že stáčanie periastrónu u PSR 1913+16 za deň je rovnaké, ako stáčanie perihélia Merkúru za 100 rokov!

Za tieto výsledky bola v roku 1993 udelená Nobelova cena J. H. Taylorovi a R. A. Hulseovi.



Obrázok 3: Tvar dráhy pri vnesenej poruche.

c.) Ohyb svetelných lúčov v gravitačnom poli

Miesto rovníc pre nulové geodetické čiary je jednoduchšie použiť (V.21). Ak $ds \rightarrow 0$, musí $h \rightarrow \infty$ v rovnici (V.21) a teda aj v rovnici (V.25). Za základnú rovnicu vezmeme teda (V.25) pri $h \rightarrow \infty$:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2}r_g u^2. \tag{V.30}$$

K riešeniu homogénnej rovnice (nulté priblíženie)

$$u = \frac{\cos(\varphi + \omega)}{R}, \tag{V.31}$$

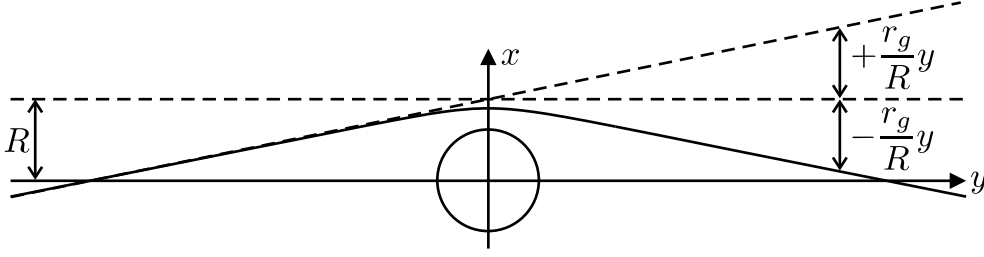
kde R, ω sú integračné konštanty, pridáme partikulárny integrál rovnice s pravou stranou. Bez obmedzenia všeobecnosti môžeme položiť $\omega = 0$ a zmysel R sa vyjasní neskôr.

V prvom priblížení dosadíme (V.31) na pravú stranu (V.30)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2} \frac{r_g}{R^2} \cos^2 \varphi = \frac{3}{4} \frac{r_g}{R^2} (1 + \cos 2\varphi) \tag{V.32}$$

Z rovnice (V.32) vidíme, že pre partikulárne riešenie u_1 musíme voliť

$$u_1 = A \sin 2\varphi + B \cos 2\varphi + C$$



Obrázok 4: Ohyb svetelných lúčov v gravitačnom poli.

a po dosadení u_1 , u'_1 a u''_1 do (V.32) dostaneme

$$A = 0, \quad B = -\frac{r_g}{4R^2}, \quad C = \frac{3r_g}{4R^2},$$

teda

$$u_1 = -\frac{r_g}{4R^2} \cos 2\varphi + \frac{3}{4} \frac{r_g}{R^2}$$

a po úprave

$$u_1 = \frac{r_g}{2R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) \quad (\text{V.33})$$

Celkové riešenie rovnice (V.3) je

$$u = \frac{\cos \varphi}{R} + \frac{r_g}{2R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) \quad (\text{V.34})$$

Ak sa podľa (V.23) vrátíme ku premennej r a ďalej podľa vzťahov

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

ku kartézskym súradniciam x , y máme z (V.34)

$$x = R - \frac{r_g}{2R} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a pre veľké hodnoty y bude

$$x \doteq R - \frac{r_g}{2R} (\pm 2y). \quad (\text{V.35})$$

Lúč svetla sa teda bude od priamky $x = R$ odchyľovať symetricky o $\mp \frac{r_g}{R} y$ (pozri obrázok 4). Pre malé uhly je odchýlka lúča

$$\sim \frac{2r_g}{R_\odot} \quad (\text{V.36})$$

pre prechod v tesnej blízkosti Slnka.

Odchýlka vypočítaná podľa všeobecnej teórie relativity je 1,75". V roku 1919 boli namerané hodnoty 1,98" (Sobral) a 1,61" (Principe) — A. S. Eddington a spolupracovníci.

Výpočty bez všeobecnej teórie relativity dávajú približne polovičný výsledok, napr. táto, veľmi často používaná úvaha: vychádzame zo vzťahu $\hbar\omega = m_{\text{fot}}c^2 \Rightarrow m_{\text{fot}} = \frac{\hbar\omega}{c^2}$ a vypočítame gravitačné Newtonovo pôsobenie na m_{fot} . Už „hmotnosť fotónu“ je podozrivá (a nesprávna) koncepcia.

VI Gravitačný kolaps

Singularita $r = r_g$ vo Schwarzschildovom riešení sa postupne ukázala ako odstrániteľná. Ukázali to mnohí, pretože značne priťahovala pozornosť. Boli to napr. Kasner (1921), Lemaître (1933), Finkelstein (1958) a i.

D. Finkelstein bol prvý, ktorý presne ukázal, že Schwarzschildovo riešenie „nepokrýva“ celý časopriestor s euklidovským 3-rozmerným priestorom, ale len jeho časť.

Čo sa vlastne deje na singularite je možné vyjasniť prechodom k *niektorej* tzv. synchronnej sústave. *Synchronná sústava* je sústava, ktorá je spojená s časticou a voľne padajúca v gravitačnom poli, t.j.

$$g_{00} = 1 \quad \Longleftrightarrow \text{čas je vlastný čas,}$$

$$g_{0i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \Longleftrightarrow \text{synchronizácia hodín v priestore pozorovateľa na častici.}$$

Metrika má tvar

$$ds^2 = dct^2 - \gamma_{ik} dx^i dx^k. \quad (\text{VI.1})$$

Pri takej metrike máme $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ pri $x^{i=1,2,3} = \text{const.}$

$$u^0 = 1$$

$$u^i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

a identicky platí

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu u^\rho u^\nu = \Gamma_{00}^\mu \equiv 0,$$

t.j. časové čiary sú *geodetické línie*.

Jedna z možností je postupovať tu ako Lemaître. Od premenných t a r prejdeme k novým premenným τ a R nasledujúcim spôsobom.

$$t \longrightarrow \tau, \quad r \longrightarrow R.$$

$$c\tau = ct + \int \frac{f(r)dr}{1 - \frac{r_g}{r}}; \quad R = ct + \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)f(r)}.$$

Obe rovnice diferencujeme a dostávame

$$dc\tau = dct + \frac{f(r)dr}{1 - \frac{r_g}{r}}; \quad dR = dct + \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)f(r)}.$$

Druhú rovnicu odčítame od prvej

$$dc\tau - dR = dr \left[\frac{f(r) - \frac{1}{f(r)}}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \right] = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{f^2 - 1}{f}$$

a dostávame

$$R - c\tau = \int \frac{(1 - f^2)}{f\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} dr.$$

Odtiaľ

$$ds^2 = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - f^2} (c^2 d\tau^2 - f^2 dR^2) - r^2 (d\Omega)^2,$$

kde sme uhlovú časť označili $d\Omega = \sin^2 \vartheta d\varphi + d\vartheta^2$.

Lemaître zvolil $f(r) = \sqrt{\frac{r_g}{r}}$, tým sa odstránila singularita a tiež $g_{\tau\tau} = 1$ t.j. sústava je synchronónna a

$$R - c\tau = \int \frac{1 - f^2}{f\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} dr = \int \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_g}} dr = \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{\sqrt{r_g}}.$$

Odtiaľ dostávame

$$r = \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{2/3} r_g^{1/3}$$

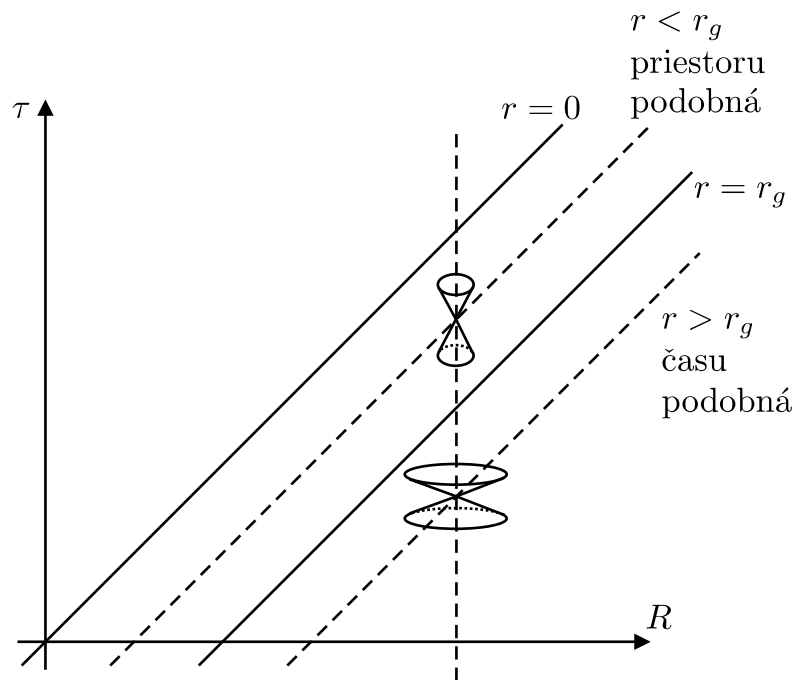
a

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g} (R - c\tau) \right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{4/3} r_g^{2/3} d\Omega^2.$$

Pre radiálne svetelné signály platí

$$ds^2 = 0, \quad (d\Omega)^2 \equiv 0,$$

$$c \frac{d\tau}{dR} = \pm \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{-1/3} r_g^{1/3} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r}}.$$



Záver: neexistuje (pod r_g) vzťažná sústava taká, aby $r = \text{const.}$ pre časticu.

VII Jednoduché kozmologické riešenia Einsteinových rovníc

V kapitole V sme uviedli riešenie Einsteinových rovníc v prípade centrálneho poľa. Druhá rozsiahla možnosť použitia týchto rovníc je aplikovať ich na celý vesmír pri rôznych zjednodušujúcich predpokladoch o rozložení hmôt. Tým sa odkryli nové možnosti pre modernú kozmológiu, ktorá sa tým stala oveľa realistickejšia a tiež experimentálne overiteľná.

Prvé také riešenia hneď od vzniku VTR pochádzajú od Einsteina, de Sittera a ďalších. V snahe získať riešenia stacionárne modifikoval Einstein rovnice tak, že pridal člen s kozmologickou konštantou Λ , ako sme spomenuli v kapitole IV v historickej poznámke na strane 30. Fyzikálne však taký člen znamená, že priestoročas by mal a priori nejakú krivosť, ktorá by nezávisela od stavu gravitačného poľa. To je ťažko prijateľné, pokiaľ nepostúpime ďalej za VTR. Preto budeme používať Einsteinove rovnice bez konštanty Λ .

V r. 1922 Alexander A. Fridman našiel riešenia Einsteinových rovníc za predpokladu *homogénneho* a *izotropného* rozdelenia prachovej hmoty v celom vesmíre. Predpoklad homogenity sa nezdá splnený, lebo vesmír sa skladá z hviezd a tie tvoria galaxie, pričom medzi objektmi je vákuum, alebo veľmi riedka hmota. Ak však vezmeme dostatočne veľké oblasti vesmíru (cez $50Mps$), je už homogenita dobre odôvodnená a zväčšovaním skúmanej oblasti narastá.

VII.1 Meranie vzdialeností v astronómii

Meranie vzdialeností v astronómii je samostatná kapitola, veľmi zložitá a o presnosti meraní si môžeme urobiť elementárnu predstavu z tabuľky, prevzatej z Weinbergovej učebnice. Je z nej však jasné, že vzdialenosti (a pri dynamike vesmíru i časové intervaly) treba brať s istou rezervou. Izotropné a homogénne rozdelenie hmoty vo vesmíre je tiež v zhode s heuristickým princípom, ktorý prijímame (skôr z nutnosti) pri štúdiu vesmíru ako celku a ktorý sa nazýva *kozmozlogický princíp*. Ten hovorí, že vesmír je rovnaký pri pozorovaní z ktoréhokoľvek *miesta* v ňom. (Zamyslite sa, k akým fantáziám by viedlo neprijatie tohto princípu!)

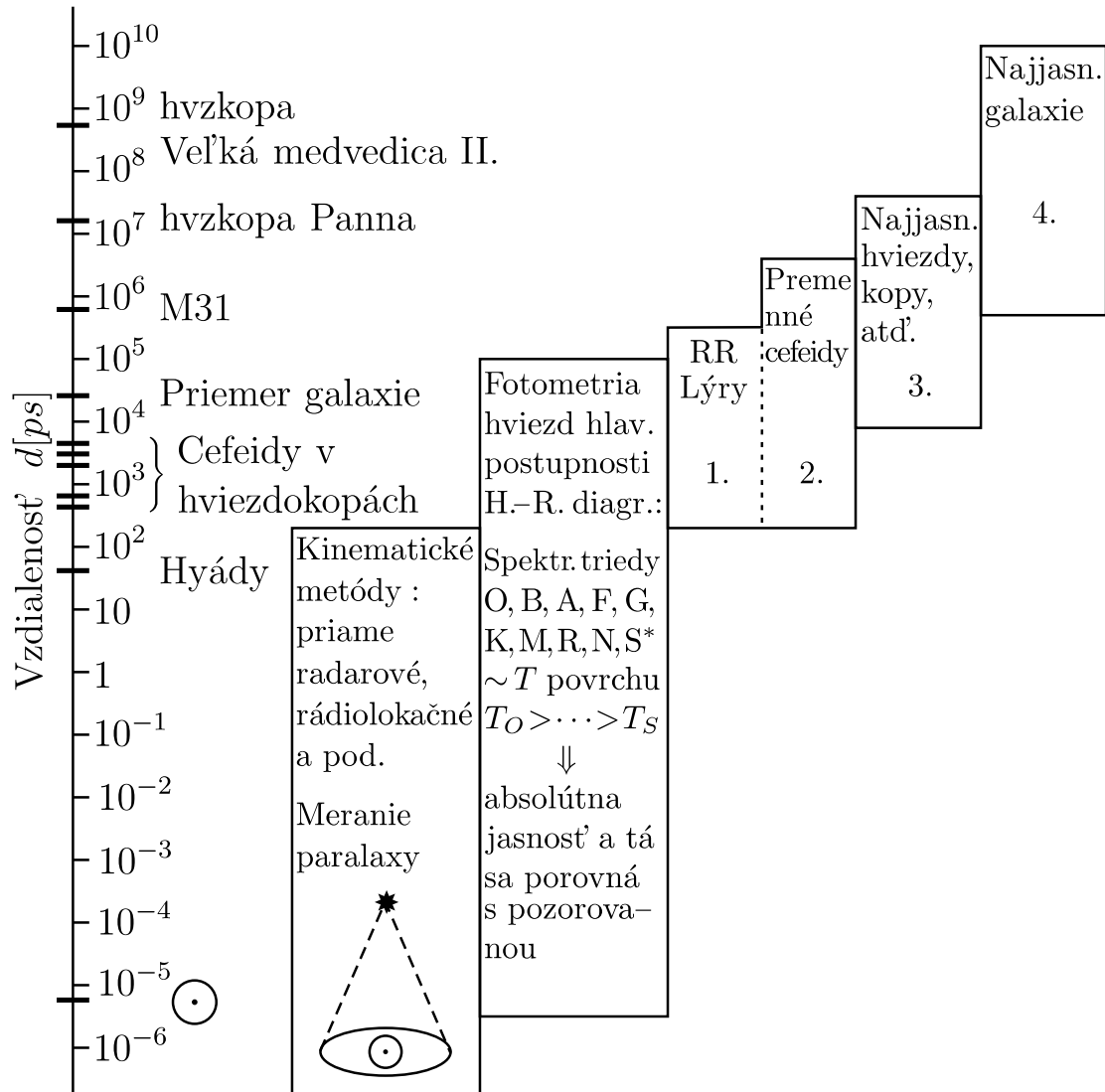
VII.2 Izotropné modely a ich rozdelenie

Aparát, ktorý sme vypracovali v predchádzajúcich kapitolách umožňuje „zapracovať“ kozmologický princíp do geometrických dôsledkov. Interval dl^2 pre priestorovú časť je

$$dl^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1 \div 3), \quad (\text{VII.1})$$

kde γ_{ik} sú zložky metrického tenzora priestorovej časti priestoročasu. Riemannov tenzor krivosti označíme P_{iklm} . Popisuje krivosť trojrozmernej priestorovej časti nášho vesmíru. V izotropnom priestore bude P_{iklm} len funkciou metrického tenzora γ_{ik} a nie jeho derivácií podľa súradníc, ktoré vstupujú do Christoffelových symbolov. Je to preto, lebo všetky smery sú úplne rovnocenné a P_{iklm} musí byť určiteľné v bode. Nemôže teda závisieť od *zmeny* γ_{ik} v okolí bodu. Presnejšie, tá závislosť je v každom bode rovnaká a neprejaví sa na zložkách P_{iklm} . Preto s ohľadom na symetriu P_{iklm} (pozri str. 19) budeme mať

$$P_{iklm} = \lambda (\gamma_{il}\gamma_{km} - \gamma_{im}\gamma_{kl}), \quad (\text{VII.2})$$



1. premenné s pevnou závislosťou absolútnej jasnosti na perióde
2. podobne, ale s istými ťažkosťami (Baade 1952)
3. málo presné
4. málo presné

Robia sa silné štatistické a fyzikálne predpoklady, ktoré nemusia byť presné. V prípade 3. môžu byť najjasnejšie hviezdy galaxií zle identifikované (t.j. nejde o hviezdy). Do 4. patrí určovanie vzdialeností z červeného posunu.

* Oh be a fine girl, kiss me right now, sweetheart!

Obrázok 5: Meranie vzdialeností v astronómii

kde λ je konštanta. Potom pre Ricciho tenzor máme

$$P_{km} = P_{knm}^n = 2\lambda\gamma_{km} \quad (\text{VII.3})$$

Dôkaz:

$$P_{klm}^n = \gamma^{in} P_{iklm} = \gamma^{in} (\gamma_{il}\gamma_{km} - \gamma_{im}\gamma_{kl}) \lambda = (\delta_l^n \gamma_{km} - \delta_m^n \gamma_{kl}) \lambda$$

Položíme $n = l$:

$$P_{km} = P_{knm}^n = \lambda (\delta_n^n \gamma_{km} - \delta_m^n \gamma_{kn}) = 3\lambda\gamma_{km} - \lambda\gamma_{km} = 2\lambda\gamma_{km}$$

Q.E.D.

Pre skalárnu krivosť P podobne dostaneme

$$P = 6\lambda \quad (\text{VII.4})$$

Úloha: odvoďte VII.4

Máme veľmi dôležitý záver: krivosť izotropného priestoru závisí od jedinej konštanty λ . Podľa toho, aká bude táto konštanta, máme tri typy priestorovej metriky:

- A.) $\lambda > 0$ priestor s konštantnou kladnou krivosťou (eliptický)
- B.) $\lambda < 0$ priestor s konštantnou zápornou krivosťou (Lobačevského, hyperbolický)
- C.) $\lambda = 0$ priestor s nulovou krivosťou (Euklidov, rovinný)

A.) Priestor s konštantnou kladnou krivosťou

Ako príklad ďalšieho postupu preberieme prípad s $\lambda > 0$, teda trojrozmerný priestor s konštantnou kladnou krivosťou. Máme určiť γ_{ik} vo vzťahu (VII.1). Ponoríme študovaný 3-rozmerný priestor do priestoru s dimenziou o jednotku väčšou, ktorý je určite izotropný a má konštantnú kladnú krivosť. Takým priestorom je štvorrozmerná hypersféra s polomerom a , ktorá má rovnicu

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2, \quad (\text{VII.5})$$

kde x_4 je fiktívna štvrtá *priestorová* súradnica. Element dĺžky v tomto izotropnom priestore (t.j. na tejto hypersfére) je

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \quad (\text{VII.6})$$

Vylúčime fiktívnu súradnicu x_4 pomocou rovnice (VII.5). Keďže $x_4 \equiv f(x_1; x_2; x_3)$, máme:

$$x_4 = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

$$dx_4 = \frac{-2x_1 dx_1 - 2x_2 dx_2 - 2x_3 dx_3}{2\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}$$

a dosadením do (VII.6) dostávame interval dl^2 pre trojrozmerný izotropný priestor:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, \quad (\text{VII.7})$$

z ktorého vidíme, že

$$\gamma_{ik} = \delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}.$$

Keďže ide o izotropný priestor, pre ktorý platí rovnica (VII.4), môžeme voliť počiatok súradnicového systému kdekoľvek a vypočítať skalárnu krivosť v jeho blízkosti. To nám umožňuje určiť konštantu λ , lebo podľa (VII.4) by bol výpočet rovnaký v ľubovoľnom bode priestoru.

V blízkosti počiatku, kde $r_e^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ll a^2$ (e značí euklidovský) máme pre γ_{ik}

$$\gamma_{ik} = \delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{a^2} \quad (\text{VII.8})$$

a pre λ dostaneme

$$\lambda = \frac{1}{a^2}. \quad (\text{VII.9})$$

Dôkaz, resp. výpočet: keďže $r_e^2 = x_i x^i \ll a^2$, máme $\gamma^{ik} = \delta^{ik} - \frac{x^i x^k}{a^2}$, ako vidieť z nasledujúceho výpočtu:

$$\gamma_{ik} \gamma^{il} = \left(\delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{a^2} \right) \left(\delta^{il} - \frac{x^i x^l}{a^2} \right) = \delta_{ik} \delta^{il} + \frac{x_l x_k}{a^2} - \frac{x^k x^l}{a^2} - \frac{x_i x^i x_k x^l}{a^2} \doteq \delta_k^l.$$

Potom ale

$$x^l = \gamma^{il} x_i = \left(\delta^{il} x_i - \frac{x_i x^i x^l}{a^2} \right) = x_l \left(1 - \frac{x_i x^i}{a^2} \right) \doteq x_l$$

a teda nemusíme rozlišovať kovariantné a kontravariantné zložky súradníc.

Pre Christoffelove symboly platí (II.26):

$$\begin{aligned} \Gamma_{kl}^i &= \frac{1}{2} \gamma^{im} \left(\frac{\partial \gamma_{mk}}{\partial x_l} + \frac{\partial \gamma_{ml}}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_m} \right) = \\ &= \frac{1}{2a^2} \left(\delta^{im} - \frac{x_i x_m}{a^2} \right) (\delta_{ml} x_k + \delta_{kl} x_m + \delta_{mk} x_l + \delta_{lk} x_m - \delta_{km} x_l - \delta_{lm} x_k) = \\ &= \frac{1}{a^2} \left(\delta^{im} - \frac{x_i x_m}{a^2} \right) x_m \delta_{lk} = \frac{1}{a^2} \left(\delta^{im} x_m - \frac{x_i x_m x_m}{a^2} \right) \delta_{lk}. \end{aligned}$$

Máme:

$$\Gamma_{kl}^i = \begin{cases} 0 & \text{pre } k \neq l \\ \frac{x_i}{a^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{a^2}\right) & \text{pre } k = l \end{cases}$$

Z rovnice (IV.6) môžeme vypočítať P_{ii} :

$$P_{ii} = \frac{\partial \Gamma_{ii}^l}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x_i} + \Gamma_{ii}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l.$$

V počiatku súradnicového systému je 3. a 4. člen nulový a 1. a 2. po odčítaní rovnakých členov a derivovaní (urobte si to! — **Úloha**) dajú

$$\frac{6}{a^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{a^2}\right) - \frac{4r_e^2}{a^4}.$$

Zo (VII.4) máme teda pri $r_e^2 \ll a^2$

$$\frac{6}{a^2} = 6\lambda$$

odkiaľ plynie (VII.9).

Q.E.D.

Veličina a sa chová ako polomer krivosti izotropného priestoru, čo sa vzhľadom k rovnici (VII.5) dalo očakávať. O koľko sa izotropná metrika líši od euklidovskej, zistíme pri prepise metriky (VII.7) do „sférických“ súradníc r_e, ϑ, φ :

$$\begin{aligned} x_1 &= r_e \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_2 &= r_e \sin \vartheta \sin \varphi \\ x_3 &= r_e \cos \vartheta \end{aligned}$$

Namiesto krkolomného zdĺhavého výpočtu urobíme tento prechod v dvoch krokoch s použitím toho, čo už vieme z predchádzajúcich kapitol:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr_e^2 + r_e^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = \frac{1}{2} [d(x_1^2) + d(x_2^2) + d(x_3^2)] = \frac{1}{2} d(r_e^2) = r_e dr_e$$

a

$$dl^2 = dr_e^2 + r_e^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + \frac{r_e^2 dr_e^2}{a^2 - r_e^2}$$

a konečne, sčítaním prvého a posledného člena

$$dl^2 = \frac{dr_e^2}{1 - \frac{r_e^2}{a^2}} + r_e^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (\text{VII.10})$$

Faktor $\left(1 - \frac{r_e^2}{a^2}\right)^{-1}$ má významné dôsledky. Pri $\lambda = \frac{1}{a^2} > 0$ zisťujeme, že kružnica má dĺžku $2\pi R$ ($dr_e = 0$; $d\vartheta = 0$; $r_e = R$; $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ a integrujeme cez φ), ale jej polomer je

$$\int_0^R \frac{dr_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_e}{a}\right)^2}} = a \arcsin \frac{R}{a},$$

teda viac, než R . Preto polomer dĺžky kružnice k polomeru je menej, než 2π (ako na guli, ak „polomer“ meriame po povrchu).

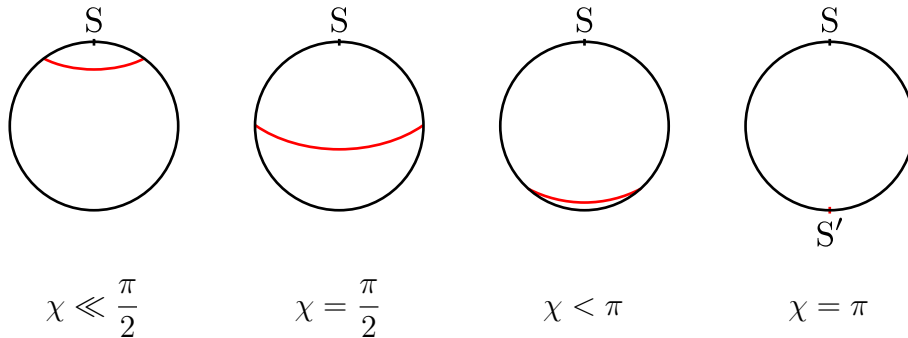
V izotropnom priestore máme teda univerzálnu konštantu a , jeho polomer. Prejdeme k inému vhodnému zápisu tak, aby sme všetky vzdialenosti vyjadrili ako násobok a vzťahom

$$r_e = a \sin \chi, \tag{VII.12}$$

teda $r_e \rightarrow \chi$, kde χ je nová súradnica, ktorá sa mení v intervale $\langle 0; \pi \rangle$. Potom

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]. \tag{VII.13}$$

Vzdialenosť od počiatku je teda $a\chi$ (nie r_e !!) a vidíme, že maximálna vzdialenosť v tomto vesmíre je πa . povrch gule v týchto súradniciach je $4\pi a^2 \sin^2 \chi$. Pouvažujte o jeho chovaní. Môžu vám pomôcť tieto analogické obrázky na guli:



Objem celého priestoru je *konečný*:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi a^2 \sin^2 \chi \sin \vartheta d\chi d\vartheta d\varphi = 2\pi^2 a^3 \tag{VII.14}$$

Izotropný 3-rozmerný priestor s kladnou krivosťou je konečný čo do objemu, ale bez hraníc.

Poznámky¹⁰:

1. Celkový náboj musí byť nulový!
2. Zachovanie celkového 4-vektora energie-hybnosti stráca zmysel, lebo degeneruje na identitu $0 = 0$.

¹⁰Landau-Lifšic: Teorija polja, str. 457

B.) Priestor s konštantnou zápornou krivosťou

Veľmi stručne a analogicky s predchádzajúcim: tu je $\lambda < 0$ a v izotropnom prípade, kde $\lambda = \frac{1}{a^2}$ to znamená, že a je rýdzo imaginárne. Ak teda v našich vzorcoch uskutočníme prechod $a \rightarrow ia$, dostaneme vzťahy pre priestor s konštantnou zápornou krivosťou. To je v zhode so známym faktom, že dvojrozmerná Lobačevského geometria je geometria na sfére s polomerom ia . Všetky vzťahy sa zmenia rovnako, zmena je síce formálna, ale geometrický obsah sa zmení podstatne.

Pre λ dostaneme, analogicky ku (VII.9)

$$\lambda = -\frac{1}{a^2}. \quad (\text{VII.15})$$

Vzťah (VII.10) prejde na

$$dl^2 = \frac{dr_e^2}{1 + \frac{r_e^2}{a^2}} + r_e^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (\text{VII.16})$$

Vidíme, že r_e môže teraz prebiehať všetky hodnoty od 0 do $+\infty$. Vzťah (VII.12) musíme teda modifikovať, ale formálne málo, i keď význam bude ďalekosiahly. Znamienko (+) v menovateli napovedá, že ak sa nám má podariť prechod ku analógii výrazu (VII.13), máme voliť

$$r_e = a \sinh \chi, \quad (\text{VII.17})$$

pričom nová súradnica $\chi \in (0; \infty)$! Potom analogicky ku (VII.13) máme

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]. \quad (\text{VII.18})$$

Povrch gule by bol teraz $4\pi a^2 \sinh^2 \chi$ a s rastom χ bude neobmedzene narastať. Aj celkový objem priestoru je nekonečný. Pomer dĺžky kružnice ku polomeru bude viac, než 2π .

C.) Priestor s nulovou krivosťou

Toto je všeobecne známy euklidovský priestor s tromi priestorovými rozmermi s metrikou

$$dl^2 = dr_e^2 + r_e^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (\text{VII.19})$$

VII.3 Časopriestorové modely s izotropným priestorom

Voľba vzťažnej sústavy: najvhodnejšia je sústava, spojená v každom bode s hmotou v tomto bode — „synchronná“. Rýchlosť hmoty v každom bode je v tejto sústave definitorky nulová. Takto sa zachováva izotropia. Pre synchronnú sústavu platí to, čo sme uviedli v kapitole VI. Budeme mať teda $g_{0i} \equiv 0$ pre $i = 1, 2, 3$ a pre interval

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 - dl^2, \quad (\text{VII.20})$$

pričom g_{00} je len funkciou x^0 . Preto je možné zvoliť také odčítanie času, aby $g_{00} = 1$ a

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2. \quad (\text{VII.21})$$

Premenná t je za týchto okolností synchronný vlastný čas v každom bode priestoru (*priestoru!*). Voľba dl^2 vedie teraz ku trom základným modelom.

A.) Model do seba uzavretého izotropného vesmíru

S použitím (VII.13) v tomto prípade máme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)], \quad (\text{VII.22})$$

$a(t)$ je teraz už funkciou času t , ktorú musíme určiť z Einsteinových rovníc. Je výhodné zaviesť miesto $t \rightarrow \eta$ podľa vzťahu

$$cdt = a(\eta) d\eta \quad (\text{VII.23})$$

a potom pre ds^2 máme:

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]. \quad (\text{VII.24})$$

Máme

$$\begin{aligned} x^0 &= \eta, \quad x^1 = \chi, \quad x^2 = \vartheta, \quad x^3 = \varphi, \\ g_{00} &= a^2, \quad g_{11} = -a^2, \quad g_{22} = -a^2 \sin^2 \chi, \quad g_{33} = -a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (\text{VII.25})$$

Podobne, ako v kapitole V vypočítame Christoffelove symboly, pričom $\prime \equiv \frac{d}{d\eta}$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a}, \quad \Gamma_{ik}^0 = -\frac{a'}{a^3} g_{ik}, \quad \Gamma_{0k}^i = \frac{a'}{a} \delta_k^i, \quad \Gamma_{i0}^0 = \Gamma_{00}^i = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (\text{VII.26})$$

Γ_{jk}^i nie je nutné poznať explicitne, lebo rovnice (VII.3) a (VII.4) už môžeme použiť.

Zostavíme teraz jednu z Einsteinových rovníc, máme z nej určiť len $a(\eta)$. Najvhodnejšia sa ukazuje [pozri (IV.23b)]

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R \delta_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4} T_0^0. \quad (\text{VII.27})$$

Tak ako v kapitole V použijeme Christoffelove symboly (VII.26) a vzťah (IV.6) na výpočet R_0^0

$$R_0^0 = \frac{3}{a^4} (a'^2 - aa''). \quad (\text{VII.28})$$

Okrem toho, $R = R_0^0 + R_i^i$ a tak potrebujeme zmiešané zložky Ricciho tenzora od priestorových indexov. S ohľadom na (VII.3) môžeme napísať $R_k^i = -P_k^i +$ (členy obsahujúce g_{ik} a g_{00} spolu), t.j. $R_k^i = -\frac{2}{a^2} \delta_k^i +$ (členy obsahujúce g_{ik} a g_{00} spolu). Na výpočet zátvorky opäť použijeme (VII.26) a (IV.6) a dostaneme

$$R_k^i = -\frac{1}{a^4} (2a^2 - a'^2 + aa'') \delta_k^i \quad (\text{VII.29})$$

a potom

$$R = -\frac{6}{a^3} (a + a'') \quad (\text{VII.30})$$

ĽS rovnice (VII.27) sa rovná

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{3}{a^4} (a^2 + a'^2). \quad (\text{VII.31})$$

Čo sa týka pravej strany, máme synchronnú vzťažnú sústavu, preto $u^i \equiv 0$ ($i=1;2;3$) a $u^0 = \frac{1}{a}$ a zo vzťahu (IV.14) dostaneme

$$T_0^0 = \mathcal{E} \quad (\text{VII.32})$$

a Einsteinova rovnica (VII.27) nadobudne tvar

$$\frac{3}{a^4} (a^2 + a'^2) = \frac{8\pi k}{c^4} \mathcal{E} \quad (\text{VII.33})$$

s dvomi neznámymi $a(\eta)$ a \mathcal{E} .

Druhú rovnicu získame z termodynamických úvah. Ak použijeme vzťah (IV.14), zanedbávame procesy disipácie energie, čo znamená, že celková entropia sústavy sa nemení. Ak E , S , V , p a T sú zaradom energia, entropia, objem, tlak a absolútna teplota sústavy, platí

$$dE = TdS - pdV \quad (\text{VII.34})$$

a pri konštantnej entropii

$$dE = -pdV. \quad (\text{VII.35})$$

Pre hustotu energie $\mathcal{E} = \frac{E}{V}$ dostávame (s použitím (VII.35))

$$d\mathcal{E} = \frac{dE}{V} - \frac{E}{V^2}dV = -(p + \mathcal{E}) \frac{dV}{V}. \quad (\text{VII.36})$$

Keďže ale $V \sim a^3$ (VII.4) a $\frac{dV}{V} = 3\frac{da}{a} = 3d(\ln a)$, zo (VII.36) dostávame

$$-\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E} + p} = 3d(\ln a) \quad (\text{VII.37})$$

a po integrovaní

$$3 \ln a = 0 \int \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E} + p} + \ln(\text{const.}). \quad (\text{VII.38})$$

Ak je známa stavová rovnica hmoty vo vesmíre, t.j. závislosť $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p)$, môžeme integrovať a (VII.38) vyjadruje hustotu energie \mathcal{E} ako funkciu $a(\eta)$. Ak poznáme $\mathcal{E}(a)$, môžeme integrovať rovnicu (VII.33). Z nej

$$a'^2 = \left(\frac{8\pi k \mathcal{E}}{3c^4} a^2 - 1 \right) a^2$$

$$\frac{da}{d\eta} = \pm a \sqrt{\frac{8\pi k \mathcal{E}}{3c^4} a^2 - 1}$$

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{8\pi k \mathcal{E}}{3c^4} a^2 - 1}} \quad (\text{VII.39})$$

Rovnice (VII.38) a (VII.39) riešia vo všeobecnom tvare úlohu o určení metriky v izotropnom, do seba uzavretom vesmíre.

Integrály (VII.38) a (VII.39) idú integrovať ľahko v niektorých jednoduchých prípadoch, čo teraz urobíme.

A.) α) „Prachová“ hmota

Píšeme v úvodzovkách, lebo máme na mysli „prach“ makroskopických telies — hviezd — a uvažujeme len ich hmotnosti. Predpokladáme rýchlosti veľmi malé oproti c . Tlak „plynu“ týchto telies zanedbávame, rovnako ako tlak žiarenia, započítame len pokojovú hmotnosť. Potom pre „prachovú“ hmotu máme

$$\mathcal{E} = \mu c^2 \quad p = 0, \quad (\text{VII.40})$$

kde μ je hustota. Dosadením do (VII.38) bude

$$3 \ln a = - \int \frac{d\mu}{\mu c^2} + \ln(\text{const.})$$

a teda

$$a^3 = \frac{\text{const.}}{\mu c^2} \Rightarrow \mu a^3 = \text{const.}, \quad (\text{VII.41})$$

čo sme mohli vidieť aj bez integrovania, lebo $a^3 \sim V$ a (VII.41) vyjadruje celkovú hmotnosť hviezd v tomto konečnom vesmíre. Preto

$$V\mu = 2\pi^2 a^3 \mu = M \Rightarrow \mu a^3 = \text{const.} = \frac{M}{2\pi^2}.$$

Výraz

$$\mu = \frac{M}{2\pi^2 a^3} \quad (\text{VII.42})$$

dosadíme do \mathcal{E} v (VII.39) a integrujeme:

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4} \frac{Mc^2}{2\pi^2 a^3} a^2 - 1}} = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{4kM}{3\pi c^2 a} - 1}}.$$

Zavedieme konštantu a_0 vzťahom

$$a_0 = \frac{2kM}{3\pi c^2}, \quad (\text{VII.43})$$

potom

$$\eta(a) = \pm \int_0^{a(\eta)} \frac{da}{\sqrt{2a_0a - a^2}}. \quad (\text{VII.44})$$

Tento integrál vedie, po doplnení v menovateli na úplný štvorec a substitúcii na arccos (pri $-$), resp. arcsin (pri $+$):

$$\begin{aligned} \eta &= \pm \int_0^{a(\eta)} \frac{da}{\sqrt{a_0^2 - (a - a_0)^2}} = \pm \frac{1}{a_0} \int_0^{a(\eta)} \frac{da}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-a_0}{a_0}\right)^2}} = \\ &= \text{subst. } \left\{ \frac{a}{a_0} - 1 = \xi; \quad da = a_0 d\xi; \quad 0 \rightarrow -1; \quad a(\eta) \rightarrow \frac{a(\eta)}{a_0} - 1 \right\} = \\ &= \pm \int_{-1}^{\frac{a(\eta)}{a_0} - 1} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \end{aligned}$$

So znamienkom $(-)$:

$$\begin{aligned} \eta &= \arccos\left(\frac{a(\eta)}{a_0} - 1\right) - \arccos(-1) \\ \eta + \pi &= \arccos\left(\frac{a(\eta)}{a_0} - 1\right) \\ \cos(\eta + \pi) &= \frac{a(\eta)}{a_0} - 1 \Rightarrow -\cos \eta = \frac{a(\eta)}{a_0} - 1 \end{aligned}$$

a nakoniec

$$a(\eta) = a_0(1 - \cos \eta). \quad (\text{VII.45})$$

So znamienkom $(+)$ dostávame arcsin, ale v dolnej medzi $\arcsin(-1) = \frac{3}{2}\pi$ a opäť máme (VII.45).

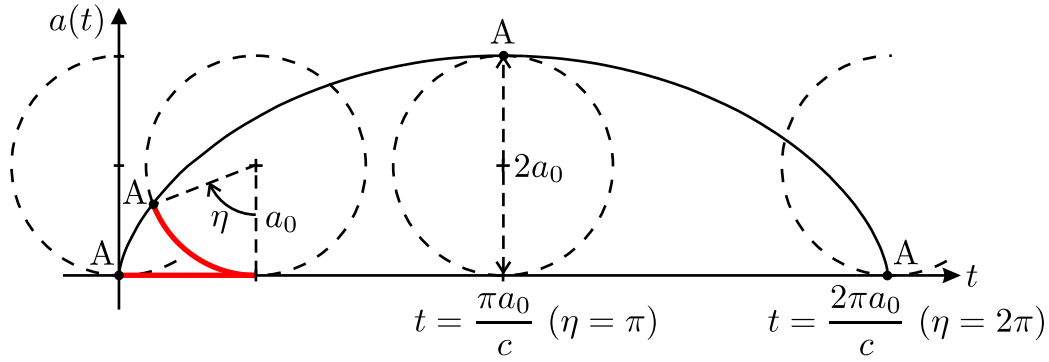
Cez rovnicu (VII.23) dostaneme pre čas t

$$t = \frac{1}{c} \int a(\eta) d\eta = \frac{a_0}{c} \int (1 - \cos \eta) d\eta,$$

t.j.

$$t = \frac{a_0}{c} (\eta - \sin \eta). \quad (\text{VII.46})$$

Rovnice (VII.45) a (VII.46) v súradniciach $a-t$ predstavujú parametrické vyjadrenie cykloidy:



Bod A na obvodě kružnice při odvale vykreslí cykloidu.

Z obrázku vidíme chovanie tohto vesmíru. Jeho polomer $a(t)$ narastá z nuly pri $t = 0$ do maximálnej hodnoty $2a_0$ v čase $t = \frac{\pi a_0}{c}$ a potom zasa klesá do nuly pri $t = \frac{2\pi a_0}{c}$.

Pri $\eta \ll 1$ dostaneme rozložením $\cos \eta$ a $\sin \eta$ do Taylorovho radu vo vzťahoch (VII.45) a (VII.46)

$$a = \frac{1}{2}a_0\eta^2, \quad t = \frac{1}{6c}a_0\eta^3$$

a po vylúčení η

$$a \approx \left(\frac{9a_0c^2}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}. \quad (\text{VII.47})$$

Závislosť hustoty μ od času v tomto prípade je

$$\mu(t) = \frac{1}{6\pi k t^2} = \frac{8 \cdot 10^5}{t^2} \quad (\text{v CGS}). \quad (\text{VII.48})$$

Všimnime si, že nezávisí od M !

A.) β .) Ultrarelativistický plyn — maximálny možný tlak

Závislosť $a(t)$ (VII.47) je podmienená tým, že tlak v „plyne“ hviezd je nulový. Pri malých hodnotách t však podľa (VII.48) narastá hustota $\mu(t)$ a pri $a \rightarrow 0$ aj $\mu \rightarrow \infty$, čo ale znamená, že nutne narastá tlak. Preto pri skúmaní metriky uzavretého vesmíru v počiatkových štádiách musíme uvažovať aj prípad *maximálneho tlaku*, ktorý plyn môže mať pri danej hustote energie \mathcal{E} . ten je daný stavovou rovnicou ultrarelativistickej hmoty

$$p = \frac{\mathcal{E}}{3}. \quad (\text{VII.49})$$

Integrál (VII.38) môžeme pri tomto tlaku tiež ľahko vypočítať a dostaneme

$$\mathcal{E}a^4 = \text{const.},$$

pričom integračnú konštantu zvolíme takto:

$$\mathcal{E}a^4 = \frac{3c^4}{8\pi k}a_1^2, \quad (\text{VII.50})$$

kde a_1 je nová integračná konštantka a člen, ktorý ju násobí je zvolený tak, aby zmysel a_1 a a_0 z predchádzajúceho bol rovnaký (pozri ďalej). Vzťah (VII.39) dá

$$\eta = \pm \int_0^{a(\eta)} \frac{da}{\sqrt{a_1^2 - a^2}} = \left[\pm \arcsin \frac{a}{a_1} \right]_0^{a(\eta)}$$

a máme

$$a(\eta) = a_1 \sin \eta \quad (\text{VII.51})$$

a použitím (VII.23) ako v predchádzajúcom, máme

$$t = \frac{a_1}{c} (1 - \cos \eta). \quad (\text{VII.52})$$

Vzťahy (VII.51) a (VII.52) platia pri veľkých hodnotách \mathcal{E} a teda pri $a \rightarrow 0$, t.j. $\eta \ll 1$. Za takých okolností $a \approx a_1\eta$, $t \approx a_1\eta^2 \frac{1}{2c}$ a po vylúčení η

$$a = \sqrt{2a_1ct}. \quad (\text{VII.53})$$

Vidíme, že v najrannejších štádiách tohto vesmíru

$$a(t) \sim t^{1/2}. \quad (\text{VII.54})$$

I keď konštanty a_0 a a_1 majú rovnaký geometrický zmysel, a_0 môžeme spojiť s celkovou hmotnosťou látky vo vesmíre M (suma pokojových (!) hmotností), pri a_1 to nie je možné, lebo pri rastúcej hustote musíme brať do úvahy aj energiu gravitačnej interakcie. Môžeme určiť závislosť $\mathcal{E}(t)$; $\mu(t)$ však v tomto prípade nemôžeme oddeliť od $\mathcal{E}(t)$. Zo vzťahov (VII.50) a (VII.53) dostaneme

$$\frac{\mathcal{E}(t)}{c^2} = \frac{3}{32\pi kt^2} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{t^2} \quad (\text{CGS}) \quad (\text{VII.55})$$

t.j. $\frac{\mathcal{E}(t)}{c^2}$ je v gcm^{-3} , ak t dosadíme v sekundách. Opäť nezávisí, okrem času, od nijakých parametrov! V oboch prípadoch $a \rightarrow 0$ pri $t \rightarrow 0$, teda $t = 0$ je singularným bodom priestoročasovej metriky izotropného modelu. to isté sa týka aj druhého bodu $a \rightarrow 0$.

Vzťah (VII.53) je dôležitý ešte pre jednu úvahu. Pri zmene znamienka t („pred $t = 0$ “) $a(t)$ by bolo imaginárne a $a(t)^2$ záporné. Taká metrika je však fyzikálne neprijateľná. Nemá teda zmysel analytické pokračovanie metriky za singularitu $t = 0$.

B.) Model otvoreného izotropného vesmíru

Postup je analogický prípadu A.). S použitím (VII.18) máme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]. \quad (\text{VII.56})$$

Opäť použijeme vzťah (VII.23) a dostaneme

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \sinh^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]. \quad (\text{VII.57})$$

Nového odvodzovania sa zbavíme, ak si uvedomíme, že (VII.57) je možné formálne získať zo (VII.24) zámenou $\eta \rightarrow i\eta$, $\chi \rightarrow i\chi$, $a \rightarrow ia$. Je to veľká výhoda, lebo aj príslušné Einsteinove rovnice poľa môžeme priamo získať zo (VII.33) touto zámenou. Rovnica (VII.38) sa dokonca vôbec nezmení, t.j.

$$3 \ln a = - \int \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E} + p} + \text{const.}, \quad (\text{VII.58})$$

teda (VII.38) \equiv (VII.58). Einsteinova rovnica (VII.33) nadobudne tvar

$$\frac{3}{a^4} (a'^2 - a^2) = \frac{8\pi k}{c^4} \mathcal{E} \quad (\text{VII.59})$$

a miesto (VII.39) budeme mať

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4} \mathcal{E} a^2 + 1}}. \quad (\text{VII.60})$$

Nebudeme už robiť podrobné výpočty, ale uvedieme výsledky a závery. Rovnice (VII.58) a (VII.60) umožňujú riešiť úlohu, ak poznáme stavovú rovnicu hmoty vo vesmíre.

B.) $\alpha.$) „Prach“ hviezd, $p \equiv 0$

$$a = a_2 (\cosh \eta - 1), \quad (\text{VII.61})$$

kde a_2 je opäť integračná konštanta a

$$t = \frac{a_2}{c} (\sinh \eta - \eta) \quad (\text{VII.62})$$

$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k} a_2. \quad (\text{VII.63})$$

Neperiodičnosť hyperbolických funkcií a to, že $\eta \rightarrow \infty$ i $\chi \rightarrow \infty$ spôsobuje, že polomer krivosti $a(t)$ monotónne rastie z nuly pri $t = 0$ ($\eta = 0$) do nekonečna pri $t \rightarrow \infty$ ($\eta \rightarrow \infty$). Tým pádom hustota μ monotónne klesá od nekonečnej hodnoty pri $t = 0$. Pre malé $\eta \ll 1$ dostávame rovnakú závislosť pre ubúdanie hustoty s časom t , ako v uzavretom modeli

$$\mu = \frac{1}{6\pi k t^2} \quad (\text{v CGS}) = \frac{8 \cdot 10^5}{t^2} \quad (\text{VII.64})$$

(porovnajte so (VII.48)).

Z rovníc (VII.61) a (VII.62) pre veľké $\eta \gg 1$ na prvý pohľad vidíme, že

$$a = ct, \quad (\text{VII.65})$$

čo predstavuje rýchlosť rozpínania tohto vesmíru pre veľké hodnoty t a hustotu, blížiacu sa nule.

Všimnime si, že toto riešenie by sme dostali z rovnice (VII.60), ak $\mathcal{E} \equiv 0$ (prázdny priestor) a príslušná metrika sa dá prepísať na galileovskú

B.) β .) Veľká hustota, ultrarelativistický prípad, $p = \frac{\mathcal{E}}{3}$

Analogicky ku uzavretému dostávame

$$\mathcal{E}a^4 = \text{const.} = \frac{3c^4 a_3^2}{8\pi k} \quad (\text{VII.66})$$

$$a(\eta) = a_3 \sinh \eta \quad (\text{VII.67})$$

$$t(\eta) = \frac{a_3}{c} (\cosh \eta - 1), \quad (\text{VII.68})$$

kde a_3 je integračná konštanta.

Pri $\eta \ll 1$ je

$$a = \sqrt{2a_3 ct} \quad (\text{VII.69})$$

a tiež

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} = \frac{3}{32\pi kt^2} \quad (\text{CGS}) = \frac{4,5 \cdot 10^5}{t^2}. \quad (\text{VII.70})$$

Keďže $a_2 \doteq a_0$ a $a_3 \doteq a_1$, sú príslušné vzťahy v otvorenom a uzavretom modeli rovnaké. Singularita je tu len jedna, pre $t \rightarrow 0$.

C.) Model izotropného vesmíru s euklidovským (rovinným) priestorom

Tento model je hraničným medzi doteraz uvedenými modelmi, $\lambda = 0$ a teda polomer krivosti priestoru je tu nekonečný. Pre interval máme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - b^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{VII.71})$$

Ak by sme postupovali analogicky, ako v A.), dostaneme Einsteinovu rovnicu

$$\frac{3}{b^2} \left(\frac{db}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi k}{c^2} \mathcal{E} \quad (\text{VII.72})$$

a opäť z termodynamických úvah rovnicu

$$3 \ln b = - \int \frac{d\mathcal{E}}{p + \mathcal{E}} + \text{const.} \quad (\text{VII.73})$$

V prípade C.) α .) pri *malých tlakoch* dostaneme

$$\mu b^3 = \text{const.} \quad (74a)$$

$$b = \text{const.} \cdot t^{2/3} \quad (74b)$$

a pri $t \rightarrow 0$ v ultrarelativistickom prípade C.) β .) so stavovou rovnicou $p = \frac{\mathcal{E}}{3}$ dostaneme

$$\mathcal{E} b^4 = \text{const.} \quad (75a)$$

$$b = \text{const.} \cdot \sqrt{t} \quad (75b)$$

I tento model má singularitu pri $t = 0$.

VII.4 Scenár štandardného modelu

Čas	Teplota	Dej
$10^{-44} s$	$10^{32} K$	gravitácia sa oddeľuje
$10^{-35} s$	$10^{28} K$	oddeľujú sa silné interakcie
$10^{-32} s$	$10^{27} K$	<i>inflačná éra</i> (nepatrí do štandardného modelu)
$10^{-10} s$	$10^{15} K$	oddeľujú sa slabé a elektromagnetické interakcie
$10^{-8} \div 10^{-4} s$	$10^{14} \div 10^{12} K$	vznik ťažkých častíc
$\sim 10 s$	$10^{12} K$	vznik ľahkých častíc
$\sim 300 s$	$\sim 10^{10} K$	syntéza jadier
$3 \times 10^5 \text{ rokov}$	$3000 K$	koniec radiačnej éry, prevaha látky
$3 \times 10^8 \text{ rokov}$		vodík, hélium
$10^9 \div 5 \times 10^9 \text{ rokov}$		vznik galaxií
$15 \times 10^9 \text{ rokov}$		vznik planét, súčasnosť

A Detaily výpočtov v centrálne symetrickom gravitačnom poli

Kedže platí vzťah

$$\Gamma_{\kappa\rho}^{\tau} = \frac{1}{2}g^{\tau\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^{\mu}} \right),$$

môžeme pre jednotlivé Christoffelove symboly písať

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\mu}} \right) = \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) = \\ &= \frac{1}{2}e^{-\nu}e^{\nu}\dot{\nu} = \frac{\dot{\nu}}{2}, \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{\mu}} \right) = \frac{1}{2}g^{00} \left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2}e^{-\nu}e^{\lambda}\dot{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\mu}} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2}e^{-\lambda}e^{\nu}\nu' = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{2\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^{\mu}} \right) = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2}r^{-2}(2r) = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\mu} \left(\frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^1} - 0 \right) = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-e^{\lambda}\dot{\lambda}) = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \\ \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\mu} \left(\frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^1} - 0 \right) = \frac{1}{2}g^{00} \left(0 + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2}e^{-\nu}e^{\nu}\nu' = \frac{\nu'}{2}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\mu} \left(\frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{\mu}} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-e^{\lambda}\lambda') = \frac{\lambda'}{2}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Pomocou týchto výsledkov môžeme určiť nenulové zložky Ricciho tenzora. Platí

$$\begin{aligned}
 R_{\kappa}^{\tau} &= g^{\tau\alpha} R_{\alpha\kappa}, \\
 R_0^1 &= g^{1\alpha} R_{\alpha 0}, \\
 R_{10} &= \frac{\partial \Gamma_{10}^{\rho}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{1\rho}^0}{\partial x^0} + \Gamma_{10}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\mu} - \Gamma_{1\rho}^{\mu} \Gamma_{0\mu}^{\rho} = \\
 &= \overbrace{\frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^0}}^{\spadesuit} + \\
 &+ \Gamma_{10}^0 \Gamma_{1\mu}^{\mu} + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{1\mu}^{\mu} - \Gamma_{10}^{\mu} \Gamma_{0\mu}^0 - \Gamma_{11}^{\mu} \Gamma_{0\mu}^1 - \underbrace{\Gamma_{12}^{\mu} \Gamma_{0\mu}^2}_0 - \underbrace{\Gamma_{13}^{\mu} \Gamma_{0\mu}^3}_0 = \\
 &= \spadesuit + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{13}^3 - \\
 &- \Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{01}^1 = \\
 &= \spadesuit + \frac{\dot{\lambda} \nu'}{2} + \frac{2\dot{\lambda}}{2r} - \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{(\lambda-\nu)} \frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)} = \\
 &= \frac{(\dot{\nu}')}{2} + \frac{(\dot{\lambda}')}{2} - \frac{(\dot{\nu}')}{2} - \frac{(\dot{\lambda}')}{2} - 0 + \frac{\dot{\lambda}}{r} = \\
 &= \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\
 R_0^1 &= g^{11} R_{10} = -e^{-\lambda} \frac{(\dot{\lambda}')}{r}.
 \end{aligned}$$

B Červia diera spájajúca dva vesmíry Reissnera-Nordstróma

Návrh: *Einstein, Rosen* (1935) a *Wheeler* (1950 a nasl.) — geometrodynamika¹¹

1. Majme list v polárnych súradniciach, v ktorom sa nachádza "červia diera" s polomerom a spájajúca obe strany tohoto listu. Od polárnych súradníc r, φ ; $r \geq 0$ prejdeme k súradniciam R, φ :

$$r, \varphi \rightarrow R, \varphi : r = \sqrt{R^2 + a^2} \quad (1)$$

$$-\infty < R < \infty, \quad (2)$$

kde $R < 0$ prislúcha jednej strane listu a $R > 0$ druhej. Na liste platí

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

a na oboch listoch potom (pozri (2))

$$ds^2 = \frac{R^2 dR^2}{R^2 + a^2} + (R^2 + a^2) d\varphi^2. \quad (3)$$

Krivosť je nulová pre $R \neq 0$ a ∞ pre $R = 0$ — nevyhovuje! Zmeníme na:

$$ds^2 = \frac{(R^2 + b^2)}{(R^2 + a^2)} dR^2 + (R^2 + a^2) d\varphi^2. \quad (4)$$

Krivosť R_c teraz bude

$$R_c = \frac{2b^2}{(R^2 + b^2)^2}. \quad (5)$$

Ako vyzerá takáto červia diera? Ponoríme ju do valcových súradníc:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

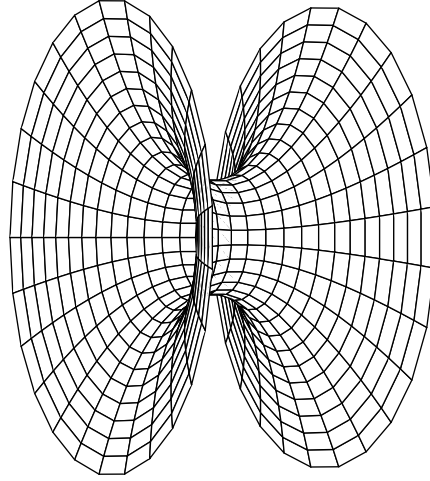
a plocha má potom rovnicu $z = z(R)$ (pri označení $' \equiv \frac{d}{dR}$)

$$ds^2 = (r'^2 + z'^2) dR^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (6)$$

a porovnaním so (4) máme

$$z' = \pm \frac{b}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

$$\int dz = \pm \int \frac{b}{\sqrt{R^2 + a^2}} dR = \pm b \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 + a^2}}{a} \right). \quad (7)$$



Obrázok 6: Červia diera.

Z (5) máme $R_c \cong 0$ pre $R \gg b$ a $R_c = 2/b^2$ pre $R = 0$. Dva parametre sú zbytočne veľa, stačí položiť $b = a$ — "jednparametrická červia diera" (pozri obrázok 6). Potom zo vzťahu (4) dostaneme

$$ds^2 = dr^2 + (R^2 + a^2)d\varphi^2. \quad (8)$$

2. Einsteinove rovnice pre červiu dieru odvodíme v štvorrozmernom časopriestore so súradnicami t, R, ϑ, φ :

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - dR^2 - (R^2 + a^2)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (9)$$

Položíme $c = 1$ a zovšeobecníme na centrálnu symetriu (pozri Schwarzschildovo riešenie)

$$d\tau^2 = dt^2 e^\nu - dR^2 e^\lambda - e^\omega d\Omega^2, \quad (10)$$

kde $\nu \equiv \nu(R)$, $\lambda \equiv \lambda(R)$, $\omega \equiv \omega(R)$ a $\iota \equiv \frac{d}{dR}$ a teda $g_{00} = e^\nu$, $g_{11} = -e^\lambda$, $g_{22} = -e^\omega$ a $g_{33} = -e^\omega \sin^2 \vartheta$. Nenulové Christoffelove symboly sú

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2} & \Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{\omega'}{2} e^{(\omega-\lambda)} & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{\omega'}{2} & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{\omega'}{2} e^{(\omega-\lambda)} \sin^2 \vartheta \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta & \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{\omega'}{2} & \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \cotg \vartheta. \end{aligned}$$

¹¹ Edward G. Harris: *Wormhole connecting two Reissner-Nordström universes*, *Am. J. Phys.*, **61**, (12), 1140 (1993)

M.S. Morris, K. S. Thorne: *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*, *Am. J. Phys.*, **56**, 395–412 (1988)

alebo pozri K. S. Thorne: *Černé díry a zborcený čas*

Odtiaľ získané nezávislé a nenulové zložky Riemannovho-Christoffelovho tenzora krivosti sú:

$$\begin{aligned}
 R_{101}^0 &= \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{2} & R_{202}^0 &= -\frac{\omega'\nu'}{4}e^{(\omega-\lambda)} \\
 R_{303}^0 &= -\frac{\omega'\nu'}{4}e^{(\omega-\lambda)}\sin^2\vartheta & R_{212}^1 &= e^{(\omega-\lambda)}\left(\frac{\omega'\lambda'}{4} - \frac{\omega''}{2} - \frac{\omega'^2}{4}\right) \\
 R_{313}^1 &= e^{(\omega-\lambda)}\left(\frac{\omega'\lambda'}{4} - \frac{\omega''}{2} - \frac{\omega'^2}{4}\right)\sin^2\vartheta & R_{323}^2 &= \sin^2\vartheta\left(1 - \frac{\omega'^2}{4}e^{(\omega-\lambda)}\right).
 \end{aligned}$$

Nenulové zložky Ricciho tenzora sú:

$$\begin{aligned}
 R_0^0 &= e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\omega'\nu'}{2}\right) \\
 R_1^1 &= e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \omega'' + \frac{\omega'^2}{2} - \frac{\omega'\lambda'}{2}\right) \\
 R_2^2 = R_3^3 &= e^{-\lambda}\left(\frac{\omega''}{2} + \frac{\omega'^2}{2} - \frac{\omega'\lambda'}{4} + \frac{\omega'\nu'}{4}\right) - e^{-\omega}.
 \end{aligned}$$

Skalárna krivosť bude:

$$R_c = e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \omega'\nu' - \omega'\lambda' + 2\omega'' + \frac{3\omega'^2}{2}\right) - 2e^{-\omega}.$$

Nenulové zložky Einsteinovho tenzora sú:

$$\begin{aligned}
 G_0^0 &= e^{-\omega} - e^{-\lambda}\left(\omega'' + \frac{3\omega'^2}{4} - \frac{\omega'\lambda'}{2}\right) \\
 G_1^1 &= e^{-\omega} - e^{-\lambda}\left(\frac{\omega'\nu'}{2} + \frac{\omega'^2}{4}\right) \\
 G_2^2 = G_3^3 &= -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\omega'\nu'}{4} - \frac{\omega'\lambda'}{4} + \frac{\omega''}{2} + \frac{\omega'^2}{4}\right).
 \end{aligned}$$

Geometrickú časť (ĽS) Einsteinových rovníc pre metriku (9) získame dosadením $\nu(R) = \lambda(R) = 0$ a $e^{\omega(R)} = R^2 + a^2 \Rightarrow \omega(R) = \ln(R^2 + a^2) \Rightarrow \omega' = \frac{2R}{R^2 + a^2}$; $\omega'' = \frac{2(a^2 - R^2)}{(R^2 + a^2)^2}$ do predchádzajúcich vzťahov:

$$\begin{aligned}
 G_0^0 &= \frac{1}{R^2 + a^2} - \left(\frac{2(a^2 - R^2)}{(R^2 + a^2)^2} + \frac{12R^2}{4(R^2 + a^2)^2}\right) = -\frac{a^2}{(R^2 + a^2)^2} = -\frac{a^2}{r^4} \\
 G_1^1 &= \frac{1}{R^2 + a^2} - \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^2} = \frac{a^2}{(R^2 + a^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Podobným výpočtom pre G_2^2 a G_3^3 dostaneme konečný tvar nenulových zložiek Einsteinovho tenzora:

$$G_\nu^\mu = \frac{a^2}{r^4} \text{diag} (-1; 1; -1; -1). \quad (11)$$

Einsteinove rovnice majú tvar:

$$G_\nu^\mu = 8\pi k T_\nu^\mu. \quad (12)$$

Aké T_ν^μ môžu realizovať túto červiu dieru?

- (a) Skúsme kontinuum (plyn, kvapalina) s tlakom p a hustotou energie \mathcal{E} . Tenzor energie-hybnosti má tvar

$$T_\nu^\mu = (\mathcal{E} + p)u^\mu u_\nu - \delta_\nu^\mu p.$$

V klude, kedy $u^\mu \equiv (1; 0; 0; 0)$, dostávame

$$T_\nu^\mu = \text{diag} (\mathcal{E}; -p; -p; -p).$$

Nevyhovuje!

- (b) Radiálne elektrické pole: z Maxwellových rovníc

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0,$$

kde $\sqrt{-g} = e^{(\omega + \frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2})} \sin \vartheta$. Nech jediné nenulové prvky sú $F^{\mu\nu} = F^{01} = -F^{10} = q e^{(-\omega - \frac{\nu}{2} - \frac{\lambda}{2})}$, kde q je integračná konštanta. Potom tenzor energie-hybnosti¹²

$$T_\nu^\mu = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\nu\lambda} F^{\lambda\mu} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right]$$

bude mať nenulové zložky

$$T_0^0 = T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = -\frac{1}{8\pi} F_{01} F^{01} = -\frac{1}{8\pi} g_{00} g_{11} (F^{01})^2 = \frac{q^2}{8\pi} e^{-2\omega}$$

a pre $e^\omega = R^2 + a^2 = r^2$ dostaneme

$$T_\nu^\mu = \frac{q^2}{8\pi r^4} \text{diag} (1; 1; -1; -1). \quad (13)$$

Nevyhovuje!

¹²vid'. napr. *L. Tóth: Špeciálna teória relativity*

(c) „Bezmasové“ skalárne pole Φ . Lagrangeova hustota je $L = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$ a Eulerove-Lagrangeove rovnice dávajú:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) = 0. \quad (14a)$$

Tenzor energie hybnosti má tvar

$$T_\nu^\mu = \left(\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \right) = \partial^\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu(\partial^\beta\Phi\partial_\beta\Phi).$$

Nech $\Phi \equiv \Phi(R)$ — len R ! Potom z (14a) je

$$\partial^1\Phi = \frac{Q}{4\pi}e^{(-\omega - \frac{\nu}{2} - \frac{\lambda}{2})},$$

kde $\frac{Q}{4\pi}$ je integračná konštanta. Potom

$$T_0^0 = -T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\frac{1}{2}\partial^1\Phi\partial_1\Phi = \frac{Q^2}{8\pi}e^{(-2\omega - \nu)}.$$

Pri $\nu = 0$ a $e^\omega = r^2$ dostaneme

$$T_\nu^\mu = \frac{Q^2}{8\pi r^4} \text{diag} (1; -1; 1; 1). \quad (14)$$

Porovnanie s (11) vedie k záveru, že tiež nevyhovuje, ale $(-T_\nu^\mu)$ by *vyhovovalo*. Potom však $T_0^0 < 0$ — „exotic matter“. Ak existuje, potom Einsteinove rovnice (12) budú splnené pri $a^2 = kQ^2$, k je Newtonova gravitačná konštanta a Q je integračná konštanta.

Pohybové rovnice – geodetické línie (pri $\vartheta = \frac{\pi}{2}$) sú

$$\begin{aligned} \frac{d^2R}{d\tau^2} + R \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left[(R^2 + a^2) \frac{d\varphi}{d\tau} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Obsah

II	Tenzory v pseudoriemannovom priestore	3
II.1	Metrický tenzor	3
II.2	Teoréma o podieli	4
II.3	Tenzor δ_{ν}^{μ}	5
II.4	Zdvíhanie a spúšťanie indexov	6
II.5	Kovariantné derivovanie	6
II.5.1	Niektoré vlastnosti $\Gamma_{\rho\nu}^{\mu}$	6
II.5.2	Vlastnosti symetrie Christoffelových symbolov	8
II.5.3	Transformácia Christoffelových symbolov pri zmene súradnicovej sústavy. $\Gamma \rightarrow \Gamma'$	9
II.5.4	Vyjadrenie Christoffelových symbolov cez metrický tenzor	10
III	Častica v gravitačnom poli. Geodetické čiary.	11
III.1	Prvý integrál pohybu rovnice (III.4)	12
III.2	Newtonovské priblíženie	14
III.3	Nulové (izotropné) geodetické čiary. Pohyb svetelného lúča v gravitačnom poli	16
IV	Einsteinove rovnice gravitačného poľa	17
IV.1	Riemannov-Christoffelov tenzor krivosti	17
IV.1.1	Symetrie Riemannovho-Christoffelovho tenzora	19
IV.2	Ricciho tenzor a skalárna krivosť	19
IV.2.1	Riemannov-Christoffelov tenzor, Ricciho tenzor a skalárna krivosť pre povrch gule	20
IV.3	Geometrický význam Riemannovho-Christoffelovho tenzora, Ricciho tenzora a skalárnej krivosti	22
IV.4	Kovariantná divergencia zmiešaného Ricciho tenzora $R_{\nu;\mu}^{\mu}$	26
IV.5	Tenzor energie-hybnosti makroskopických telies	27
IV.5.1	Niektoré vlastnosti tenzora energie-hybnosti	27
IV.6	Einsteinov tenzor a rovnice gravitačného poľa	28
IV.6.1	Einsteinov tenzor	29
IV.6.2	Rovnice gravitačného poľa	29
IV.6.3	Zmysel Einsteinových rovníc	31
V	Centrálné symetrické gravitačné pole	32
V.1	Pohyb častice a svetla v Schwarzschildovom gravitačnom poli	34
a.)	Radiálny pohyb častice	35
b.)	Dráhy planét	38
c.)	Ohyb svetelných lúčov v gravitačnom poli	40
VI	Gravitačný kolaps	43

VII Jednoduché kozmologické riešenia	46
VII.1 Meranie vzdialeností v astronómii	46
VII.2 Izotropné modely a ich rozdelenie	46
A.) Priestor s konštantnou kladnou krivosťou	48
B.) Priestor s konštantnou zápornou krivosťou	52
C.) Priestor s nulovou krivosťou	52
VII.3 Časopriestorové modely s izotropným priestorom	52
A.) Model do seba uzavretého izotropného vesmíru	53
B.) Model otvoreného izotropného vesmíru	59
C.) Model izotropného vesmíru s euklidovským (rovinným) priestorom .	60
VII.4 Scenár štandardného modelu	61
A Detaily výpočtov v centrálne symetrickom poli	62
B Červia diera spájajúca dva vesmíry Reissnera-Nordstróma	64